

สรุปเนื้อหาเรื่องกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

กราฟของพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$

จากสมการของพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อกำหนดให้ $a \neq 0, b = 0, c = 0$ จะได้ $y = ax^2$

ข้อสังเกต

1. เมื่อ $a > 0$ ได้กราฟเป็นพาราโบลาหงาย จุดต่ำสุดอยู่ที่จุด $(0,0)$ ซึ่งเป็นจุดวกกลับ
เมื่อ $a < 0$ ได้กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ จุดสูงสุดอยู่ที่จุด $(0,0)$ ซึ่งเป็นจุดวกกลับ
2. แกนสมมาตรคือ แกน y หรือเส้นตรง $x = 0$ ซึ่งสมการของแกนสมมาตรคือ $x = 0$
3. เมื่อ $a > 0$ ค่าต่ำสุดของ y คือ 0
เมื่อ $a < 0$ ค่าต่ำสุดของ y คือ 0
4. เมื่อ $a > 0$ จะได้ว่า ถ้า a มีค่าน้อยกราฟจะบานมาก แต่ถ้า a มีค่ามากกราฟจะบานน้อย
เมื่อ $a < 0$ จะได้ว่า ถ้า a มีค่าน้อยกราฟจะบานน้อย แต่ถ้า a มีค่ามากกราฟจะบานมาก

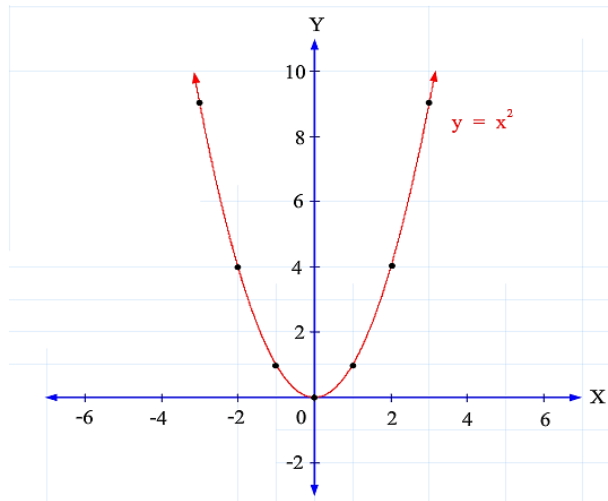
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟจากสมการต่อไปนี้

1) $y = x^2$

วิธีทำ เขียนกราฟของสมการ $y = x^2$ โดยกำหนดค่า x และหาค่า y จะได้ดังตาราง

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

เขียนกราฟของสมการได้ดังนี้



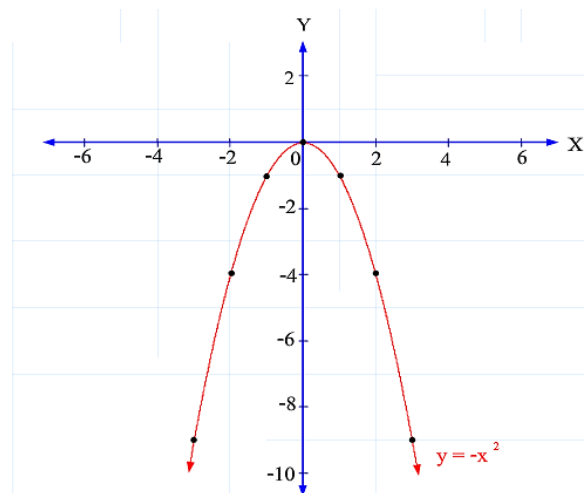
2) $y = -x^2$

วิธีทำ เขียนกราฟของสมการ $y = -x^2$ โดยกำหนดค่า x และหาค่า y จะได้ดังตาราง

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

เขียน

กราฟของสมการได้ดังนี้



พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

ลักษณะของพาราโบลา

สมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$	$a > 0$	$a < 0$
1. ลักษณะของกราฟ	พาราโบลาหงาย	พาราโบลาคว่ำ
2. จุดสูงสุด/จุดต่ำสุด	จุดต่ำสุดคือจุด (h, k)	จุดสูงสุดคือจุด (h, k)
3. แกนสมมาตร	เส้นตรง $x = h$	เส้นตรง $x = h$
4. ค่าสูงสุด/ค่าต่ำสุดของ y	ค่าต่ำสุดของ y เท่ากับ k	ค่าสูงสุดของ y เท่ากับ k

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้ พร้อมเติมข้อความลงในช่องว่างที่กำหนดให้

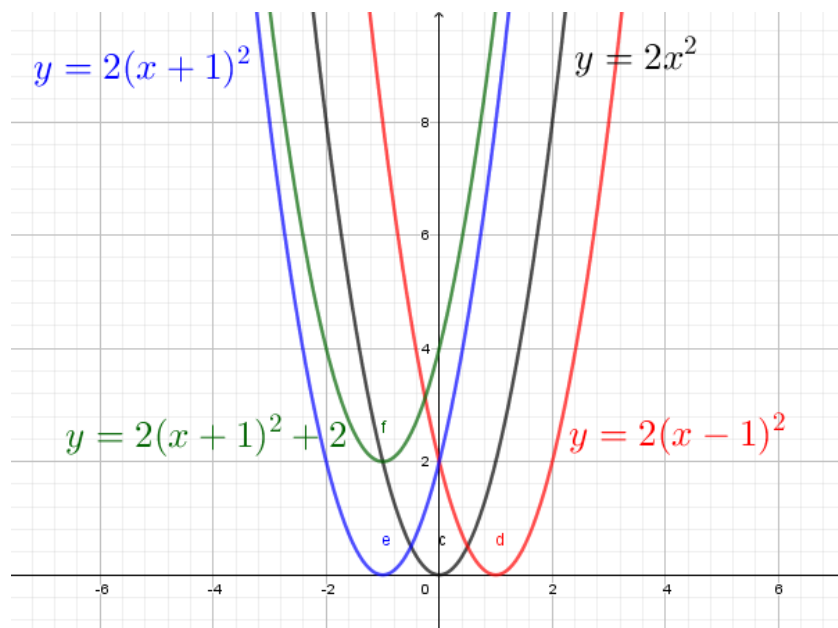
1) $y = 2x^2$

2) $y = 2(x-1)^2$

3) $y = 2(x+1)^2$

4) $y = 2(x+1)^2 + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$y = 2(x-1)^2$	32	18	8	2	0	2	8
$y = 2(x+1)^2$	8	2	0	2	8	18	32
$y = 2(x+1)^2 + 2$	10	4	2	4	10	20	34



สมการ	a	h	k	ลักษณะ กราฟ	จุดต่ำสุด	แกน สมมาตร	ค่าต่ำสุด
$y = 2x^2$	2	0	0	หงาย	(0,0)	$x = 0$	0
$y = 2(x-1)^2$	2	1	0	หงาย	(1,0)	$x = 1$	0
$y = 2(x+1)^2$	2	- 1	0	หงาย	(-1,0)	$x = -1$	0
$y = 2(x+1)^2 + 2$	2	- 1	2	หงาย	(-1,2)	$x = -1$	2

กราฟของพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

สมการที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ โดยวิธีการทำให้บางส่วนของสมการเป็นกำลังสองสมบูรณ์ซึ่งทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{จากสมการ} \quad y &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \left[\left\{ x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right\} + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \right] \\
&= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + a \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \\
&= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}$$

เมื่อ $h = -\frac{b}{2a}$ และ $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$

โดยที่จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด คือ จุด $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ y เท่ากับ

$\frac{4ac - b^2}{4a}$ และแกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = -\frac{b}{2a}$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาสมการ $y = 2x^2 - 4x + 3$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ โดยไม่ต้องวาดกราฟ

- 1) กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำหรือพาราโบลาหงาย
- 2) จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟคือจุดใด
- 3) ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ y เป็นเท่าใด
- 4) เส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

วิธีที่ 1 เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 4x + 3 \\
&= 2(x^2 - 2x) + 3 \\
&= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\
&= 2(x - 1)^2 - 2(1) + 3 \\
&= 2(x - 1)^2 + 1
\end{aligned}$$

พิจารณา $y = 2(x-1)^2 + 1$ จะได้

- 1) กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
- 2) จุดต่ำสุดคือ จุด $(1,1)$
- 3) ค่าต่ำสุดของ y เท่ากับ 1
- 4) เส้นตรง $x=1$ เป็นแกนสมมาตร

วิธีที่ 2 พิจารณาสมการ $y = 2x^2 - 4x + 3$ โดยใช้สูตร ได้ดังนี้

$$\text{จะได้ } h = -\frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{(-4)}{2(2)}$$

$$= 1$$

$$\text{และ } k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$= \frac{4(2)(3) - (-4)^2}{4(2)}$$

$$= \frac{24 - 16}{8}$$

$$= 1$$
