

## สรุปเนื้อหา เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

1. สมการกำลังสอง (quadratic equation) ที่มี  $x$  เป็นตัวแปรเดียว มีรูปทั่วไปเป็น  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$
2. การแก้สมการกำลังสอง เป็นการหาคำตอบของสมการกำลังสอง ซึ่งทำได้โดยการแยกตัวประกอบของ  $ax^2 + bx + c = 0$  ให้อยู่ในรูปของการคูณกันของพหุนามดีกรีหนึ่งสองพหุนาม
3. สมบัติของจำนวนจริง ถ้า  $m, n$  เป็นจำนวนจริง และ  $mn = 0$  แล้ว  $m = 0$  หรือ  $n = 0$
4. เมื่อ  $A$  เป็นพหุนามหนึ่ง และ  $B$  เป็นอีกพหุนามหนึ่ง ถ้า  $A \times B = 0$  แล้ว  $A = 0$  หรือ  $B = 0$
5. คำตอบของสมการ คือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริง

### ขั้นตอนการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

1. จัดสมการกำลังสองที่มี  $x$  เป็นตัวแปรเดียว ให้อยู่ในรูปทั่วไป  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$
2. ดำเนินการแยกตัวประกอบของ  $ax^2 + bx + c = 0$  ให้อยู่ในรูปการคูณกันของพหุนามดีกรีหนึ่ง 2 พหุนาม
3. ใช้สมบัติของจำนวนจริง คือ ถ้า  $m, n$  เป็นจำนวนจริง และ  $mn = 0$  แล้ว  $m = 0$  หรือ  $n = 0$  นั่นคือ เมื่อ  $A$  เป็นพหุนามหนึ่ง และ  $B$  เป็นอีกพหุนามหนึ่ง ถ้า  $A \times B = 0$  แล้ว  $A = 0$  หรือ  $B = 0$  แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของ  $A = 0$  หรือ  $B = 0$  เพื่อหาคำตอบของสมการ
4. ตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าเป็นคำตอบของสมการหรือไม่

### การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

จำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เช่น  $(a+b)^2$  และ  $(a-b)^2$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{และ} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ในการหาคำตอบของสมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$  อาจทำได้โดยการใช้ความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างกำลังสองมาช่วยในการแยกตัวประกอบของพหุนามนั้น

การหาคำตอบสำหรับกรณีทั่ว ๆ ไปของสมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$

จะได้ว่า 
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

โดยที่ ถ้า  $b^2 - 4ac \geq 0$  แล้วจะมีคำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง

ถ้า  $b^2 - 4ac < 0$  แล้วจะไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง

พิจารณการหาคำตอบสำหรับกรณีทั่ว ๆ ไปของสมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$  โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างของกำลัง ดังต่อไปนี้

$$ax^2 + bx + c = 0$$

นำ  $a$  มาหารทั้งสองข้างของสมการ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[ x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)(x) + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{-----(1)}$$

เนื่องจาก  $b^2 - 4ac$  เป็นจำนวนจริง ดังนั้น  $b^2 - 4ac \geq 0$  หรือ  $b^2 - 4ac < 0$

ถ้า  $b^2 - 4ac \geq 0$

จะได้  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  เป็นจำนวนจริง และ  $(\sqrt{b^2 - 4ac})^2 = b^2 - 4ac$

จากสมการ (1) จะได้

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x + \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= 0 \quad \text{หรือ} \quad x + \frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \\ x &= -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = -\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{จะได้ } x &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{ดังนั้น } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

ถ้า  $b^2 - 4ac < 0$

จากสมการ (1) จะได้

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{-----}(2)$$

เนื่องจาก  $b^2 - 4ac < 0$  และ  $4a^2 > 0$  สำหรับทุกค่าของ  $a$  เมื่อ  $a \neq 0$

ดังนั้น  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$  เนื่องจาก ไม่มีจำนวนจริงใดแทนในสมการ (2) แล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง

นั่นคือ สมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  จะไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น ถ้า  $b^2 - 4ac \geq 0$  แล้วจะมีคำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง

ถ้า  $b^2 - 4ac < 0$  แล้วจะไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง

**ตัวอย่างที่ 1** จงแก้สมการ  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

วิธีทำ  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$$(3x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } 3x - 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x - 2 = 0$$

$$3x = 1 \quad \text{หรือ} \quad x = 2$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{1}{3} \quad \text{หรือ} \quad x = 2$$

ตรวจสอบ 1.) แทน  $x$  ด้วย  $\frac{1}{3}$  ในสมการ  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$$\text{จะได้ } 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

2.) แทน  $x$  ด้วย 2 ในสมการ  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$$\text{จะได้ } 3(2)^2 - 7(2) + 2 = 0$$

$$12 - 14 + 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

**ตัวอย่างที่ 2** จงแก้สมการ  $9x^2 - 6x + 1 = 0$

วิธีทำ  $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$(3x)^2 - 2(3x)(1) + (1)^2 = 0$$

$$(3x - 1)^2 = 0$$

ดังนั้น  $3x - 1 = 0$

$$3x = 1$$

จะได้  $x = \frac{1}{3}$

ตรวจสอบ แทน  $x$  ด้วย  $\frac{1}{3}$  ในสมการ  $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\text{จะได้ } 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

$$1 - 2 + 1 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

**ตัวอย่างที่ 3** จงแก้สมการ  $x^2 = 12$

วิธีทำ  $x^2 = 12$

$$x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - (2\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x-2\sqrt{3}=0 \quad \text{หรือ} \quad x+2\sqrt{3}=0$$

$$\text{จะได้ } x=2\sqrt{3} \quad \text{หรือ} \quad x=-2\sqrt{3}$$

ตรวจสอบ 1.) แทน  $x$  ด้วย  $2\sqrt{3}$  ในสมการ  $x^2=12$

$$\text{จะได้ } (2\sqrt{3})^2=12$$

$$12=12 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

2.) แทน  $x$  ด้วย  $-2\sqrt{3}$  ในสมการ  $x^2=12$

$$\text{จะได้ } (-2\sqrt{3})^2=12$$

$$12=12 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

**ตัวอย่างที่ 4** จงแก้สมการ  $x^2+4x-2=0$

วิธีทำ  $x^2+4x-2=0$

$$[x^2+2(x)(2)+2^2]-2^2-2=0$$

$$(x+2)^2-6=0$$

$$(x+2)^2-(\sqrt{6})^2=0$$

$$(x+2-\sqrt{6})(x+2+\sqrt{6})=0$$

$$\text{ดังนั้น } x+2-\sqrt{6}=0 \quad \text{หรือ} \quad x+2+\sqrt{6}=0$$

$$\text{จะได้ } x=-2+\sqrt{6} \quad \text{หรือ} \quad x=-2-\sqrt{6}$$

ตรวจสอบ 1.) แทน  $x$  ด้วย  $-2+\sqrt{6}$  ในสมการ  $x^2+4x-2=0$

$$\text{จะได้ } (-2+\sqrt{6})^2+4(-2+\sqrt{6})-2=0$$

$$[(-2)^2+2(-2)(\sqrt{6})+(\sqrt{6})^2]-8+4\sqrt{6}-2=0$$

$$4-4\sqrt{6}+6-8+4\sqrt{6}-2=0$$

$$0=0 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

2.) แทน  $x$  ด้วย  $-2-\sqrt{6}$  ในสมการ  $x^2+4x-2=0$

$$\text{จะได้ } (-2-\sqrt{6})^2+4(-2-\sqrt{6})-2=0$$

$$[(-2)^2-2(-2)(\sqrt{6})+(\sqrt{6})^2]-8-4\sqrt{6}-2=0$$

$$4 + 4\sqrt{6} + 6 - 8 - 4\sqrt{6} - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ  $-2 + \sqrt{6}$  และ  $-2 - \sqrt{6}$

**ตัวอย่างที่ 5** จงแก้สมการ  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

วิธีทำ  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

$$[x^2 - 2(x)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2] - (\sqrt{3})^2 - 2 = 0$$

$$(x - \sqrt{3})^2 - 3 + 3 = 0$$

$$(x - \sqrt{3})^2 = 0$$

ดังนั้น  $x - \sqrt{3} = 0$

จะได้  $x = \sqrt{3}$

ตรวจสอบ แทน  $x$  ด้วย  $\sqrt{3}$  ในสมการ  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

จะได้  $(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}) + 3 = 0$

$$3 - 6 + 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ  $\sqrt{3}$

**ตัวอย่างที่ 6** จงแก้สมการ  $x^2 - 6x - 1 = 0$  โดยใช้สูตร

วิธีทำ  $x^2 - 6x - 1 = 0$

ในที่นี้  $a = 1$ ,  $b = -6$  และ  $c = -1$

จะได้  $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(-1)$

$$= 36 + 4$$

$$= 40$$

จากสูตร  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{40}}{2(1)} \\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ &= 3 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

นั่นคือ  $3 + \sqrt{10}$  และ  $3 - \sqrt{10}$  เป็นคำตอบของสมการ  $x^2 - 6x - 1 = 0$

**ตัวอย่างที่ 7** จงแก้สมการ  $y^2 + 8y + 5 = 0$  โดยใช้สูตร

วิธีทำ  $y^2 + 8y + 5 = 0$

ในที่นี้  $a = 1$ ,  $b = 8$  และ  $c = 5$

จะได้  $b^2 - 4ac = 8^2 - 4(1)(5)$

$$= 64 - 20$$

$$= 44$$

จากสูตร  $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ดังนั้น  $y = \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2(1)}$

$$= \frac{-8 \pm 2\sqrt{11}}{2}$$

$$= -4 \pm \sqrt{11}$$

นั่นคือ  $-4 + \sqrt{11}$  และ  $-4 - \sqrt{11}$  เป็นคำตอบของสมการ  $y^2 + 8y + 5 = 0$

### โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

การหาคำตอบของปัญหาบางปัญหาสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการกำลังสองและสามารถทำได้ ดังนี้

1. อ่านและวิเคราะห์โจทย์ปัญหา
2. กำหนดตัวแปรหนึ่งตัวแทนสิ่งที่ต้องการหาคำตอบ
3. สร้างสมการจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

4. ดำเนินการแก้สมการกำลังสอง

5. ตรวจสอบคำตอบ เพื่อดูความสมเหตุสมผลของคำตอบ

**ตัวอย่างที่ 8** พื้นห้องเรียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่ 180 ตารางเมตร ด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 3 เมตร ห้องเรียนนี้กว้างและยาวกี่เมตร

วิธีทำ

ให้  $x$  แทนความยาวด้านกว้าง

ดังนั้น ด้านยาวจะยาว  $x+3$  เมตร

พื้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง  $\times$  ยาว

จะได้สมการเป็น  $x(x+3)=180$

$$x^2 + 3x = 180$$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

ในที่นี้  $a=1$ ,  $b=3$  และ  $c=-180$

จะได้ว่า  $b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(-180)$

$$= 9 + 720$$

$$= 729$$

จากสูตร  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2(1)}$$

$$= \frac{-3 \pm 27}{2}$$

ดังนั้น  $x=12$  หรือ  $x=-15$

ตรวจสอบ

เนื่องจาก  $x$  แทนความยาวด้านกว้างซึ่งจะต้องเป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น  $-15$  จึงไม่ใช่ความยาวด้านกว้าง

ถ้าความยาวด้านกว้างคือ 12 เมตร

ดังนั้น ด้านยาวจะยาว  $12+3=15$  เมตร

จะได้ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่เท่ากับ  $12 \times 15 = 180$  ตารางเมตร

นั่นคือ ห้องเรียนนี้กว้าง 12 เมตรและยาว 15 เมตร