1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

1.1 ข้อความคาดการณ์

ข้อความคาดการณ์(conjecture)
คือ ข้อสรุปที่ได้จากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้ง ซึ่งเชื่อว่ามีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1 แบบรูปและความสัมพันธ์ ดังนี้ 3, 6, 9, 12, 15, ...

วิธีทำ สังเกตแบบรูปพบว่า

จำนวน 1 คือ 3 ซึ่งเท่ากับ 3 x 1

จำนวน 2 คือ 6 ซึ่งเท่ากับ 3 x.....

จำนวน 3 คือ 9 ซึ่งเท่ากับ .....

จำนวน 4 คือ 12 ซึ่งเท่ากับ .....

จำนวน 5 คือ 15 ซึ่งเท่ากับ .....

⋮

ดังนั้น ข้อคาดการณ์ ว่า จำนวนที่ n เท่ากับ.....

1.2 ประโยคเงื่อนไข

พิจารณาประโยคต่อไปนี้

ถ้า เส้นตรงสองเส้นตัดกัน **แล้ว** มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

เหตุ คือ เส้นตรงสองเส้นตัดกัน

ผล คือ มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

ถ้า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก **แล้ว** $\square ABCD$ มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน

เหตุ คือ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ผล คือ $\square ABCD$ มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน

ประโยคเงื่อนไข
คือ ประโยคที่ประกอบด้วยข้อความสองข้อความที่เชื่อมด้วย ถ้า...แล้ว... เรียกข้อความที่ตามหลัง **ถ้า ว่า เหตุ** และเรียกข้อความหลัง **แล้ว ว่า ผล**

1. **ประโยคมีเงื่อนไขเป็นจริง** ประโยคมีเงื่อนไขเป็นจริง เมื่อเหตุเป็นจริง แล้วทำให้เกิดผลเป็นจริงเสมอ
2. **ประโยคมีเงื่อนไขไม่เป็นจริง** ประโยคมีเงื่อนไขเป็นจริง เมื่อเหตุเป็นจริง แล้วไม่ทำให้เกิดผลเป็นจริงเสมอไป

1.3 บทกลับของประโยคเงื่อนไข

บทกลับของประโยคเงื่อนไข คือ ประโยคที่อยู่ในรูป “ถ้า q แล้ว p” เช่น จากประโยคเงื่อนไขข้างต้น “ถ้า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้ว $\square ABCD$ มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน” บทกลับของประโยคเงื่อนไขดังกล่าว คือ “ถ้า $\square ABCD$ มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แล้ว $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก”

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้

“ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้ว ΔABC จะมีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก” ซึ่งเป็นจริง

จากประโยคเงื่อนไขดังกล่าว เหตุ คือ.....

ผล คือ.....

บทกลับของประโยคเงื่อนไข คือ.....

จะเห็นได้ว่าบทกลับของประโยคเงื่อนไขเป็น.....

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้

“ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้ว ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” ซึ่งเป็นจริง

จากประโยคเงื่อนไขดังกล่าว เหตุ คือ.....

ผล คือ.....

บทกลับของประโยคเงื่อนไข คือ.....

จะเห็นได้ว่าบทกลับของประโยคเงื่อนไขเป็น.....

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นได้ว่า **ถ้าประโยคมีเงื่อนไขเป็นจริง แล้วบทกลับของประโยคนั้นอาจเป็นจริงหรือไม่เป็นจริงก็ได้**

ในทางคณิตศาสตร์เมื่อประโยคมีเงื่อนไขเป็นจริงและบทกลับเป็นจริง อาจเขียนเป็นประโยคเดียวกัน โดยใช้คำว่า **ก็ต่อเมื่อ** เชื่อมข้อความทั้งสองในประโยคเงื่อนไขนั้นได้

เช่น

ประโยคเงื่อนไข	“ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองหน้า” **ซึ่งเป็นจริง**
บทกลับ	“ถ้ารูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองหน้า แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว”**ซึ่งเป็นจริง**

เขียนเป็นประโยคเดียวกัน ได้ดังนี้

“รูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว **ก็ต่อเมื่อ** รูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองหน้า” ซึ่งประโยคนี้เป็นจริงด้วย

ในทางกลับกัน เมื่อมีประโยคที่เชื่อมด้วย **ก็ต่อเมื่อ** ซึ่งเป็นจริง เราสามารถเขียนประโยคนั้นเป็นประโยคมีเงื่อนไขสองประโยค ซึ่งแต่ละประโยคนั้นเป็นจริงด้วย

1. จงเขียนบทกลับของประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้

1) ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

.....

.....

2) ถ้า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน แล้วเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ $\square ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

.....

.....

1. จงเขียนบทกลับของประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้

1) ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

บทกลับของประโยคมีเงื่อนไข : ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน

2) ถ้า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน แล้วเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ $\square ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

บทกลับของประโยคมีเงื่อนไข : ถ้าเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ $\square ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แล้ว $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน

1. จงเขียนบทกลับของประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้

1) ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

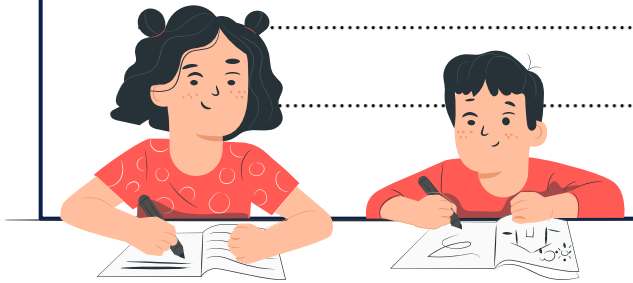
2) ถ้า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน แล้วเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ $\square ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

2. จงเขียนประโยคในข้อ 1. ให้อยู่ในรูป ก็ต่อเมื่อ

.....

.....

.....



2. จงเขียนประโยคในข้อ 1. ให้อยู่ในรูป ก็ต่อเมื่อ

2.1 ประโยคที่เชื่อมคำว่า “ก็ต่อเมื่อ” : รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

2.2 ประโยคที่เชื่อมคำว่า “ก็ต่อเมื่อ” : $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ $\square ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

3. จงเขียนประโยคที่เชื่อมด้วย “ก็ต่อเมื่อ” ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปประโยคเงื่อนไขและบทกลับของประโยคเงื่อนไข

1) รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก็ต่อเมื่อ ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นยาวเท่ากันทั้งสองคู่

ประโยคเงื่อนไข ถ้า เหตุ แล้ว ผล

บทกลับของประโยคเงื่อนไข คือ ถ้า แล้ว

3. จงเขียนประโยคที่เชื่อมด้วย “ก็ต่อเมื่อ” ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปประโยคเงื่อนไขและบทกลับของประโยคเงื่อนไข

1) รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก็ต่อเมื่อ ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นยาวเท่ากันทั้งสองคู่

ประโยคมีเงื่อนไข : ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แล้วด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นยาวเท่ากันสองคู่

บทกลับของประโยคมีเงื่อนไข : ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามของยาวเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

1.4 การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

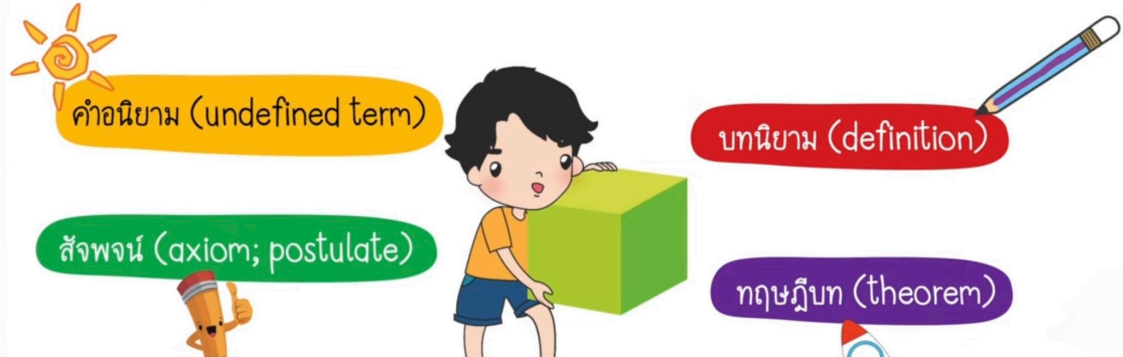
การให้เหตุผลทางเรขาคณิต ก่อนที่จะศึกษาเรื่องการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้เรียนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ *คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์* และ *ทฤษฎีบท* เสียก่อน ดังนี้

1) คำอนิยาม คือ คำที่นำมาใช้โดยไม่ต้องให้คำจำกัดความ เมื่อกล่าวถึงคำเหล่านี้ก็เป็นที่ทราบความหมายที่ชัดเจนโดยไม่ต้องการคำอธิบาย

ตัวอย่างคำอนิยามในเรขาคณิต ได้แก่ จุด เส้นตรง และระนาบ

การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

การให้เหตุผลทางเรขาคณิตมีความเกี่ยวข้องกับ



การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

คำอนิยาม (undefined term)

ในทางคณิตศาสตร์มีคำบางคำที่ใช้เป็นพื้นฐานในการสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกัน โดยไม่ต้องกำหนดความหมายของคำ คำเหล่านี้เป็น **คำอนิยาม**

ตัวอย่างคำอนิยามในเรขาคณิต ได้แก่

- จุด
- เส้นตรง

- ระนาบ

การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

บทนิยาม (definition)

เมื่อเริ่มต้นกล่าวถึงเนื้อหาสาระใด หลังจากกำหนดคำอนิยามแล้ว จะต้องให้ความหมายที่ชัดเจนและรัดกุมของคำต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระนั้น ๆ ในรูป บทนิยาม

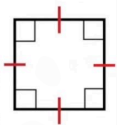
บทนิยามของรังสี

รังสี คือ ส่วนหนึ่งของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายเพียงจุดเดียว

บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน

บทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และมีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

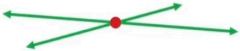
การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

สัจพจน์ (axiom; postulate)

การให้เหตุผลในการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ว่าเป็นจริงหรือไม่นั้น อาจต้องใช้ข้อความบางข้อความที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ เรียกข้อความเหล่านั้นว่า **สัจพจน์**

มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้น
ที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้

เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน
จะตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น



สามารถต่อส่วนของเส้นตรงออกไป
ทั้งสองข้างได้ โดยให้มีความยาว
ตามที่ต้องการ

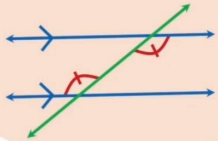
ทบทวน

นอกจากนี้ยังมีทฤษฎีบทเบื้องต้นทางเรขาคณิตที่นักเรียนเคยทราบมาแล้ว และสามารถนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ได้ เช่น

ทฤษฎีบท

ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

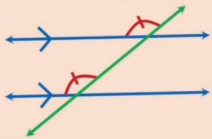


ทบทวน

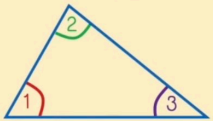
นอกจากนี้ยังมีทฤษฎีบทเบื้องต้นทางเรขาคณิตที่นักเรียนเคยทราบมาแล้ว และสามารถนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ได้ เช่น

ทฤษฎีบท

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายใน ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน



ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม รวมกันเท่ากับ 180 องศา



ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

$\hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$

การพิสูจน์

ข้อความทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่อยู่ในรูปประโยคมีเงื่อนไข การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นประโยคมีเงื่อนไข แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

1. การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง

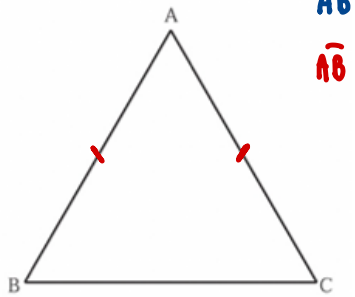
การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงนั้น จะต้องให้เหตุผลเพื่อแสดงว่า เมื่อเหตุเป็นจริงแล้ว เหตุนั้นทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอ

2. การพิสูจน์ว่าข้อความไม่เป็นจริง

การพิสูจน์ว่าข้อความนั้นไม่เป็นจริง วิธีหนึ่งคือ การให้เหตุผลเพื่อแสดงว่า เมื่อเหตุเป็นจริงแล้ว เหตุนั้นทำให้ผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริง

(ใช้ตัวอย่างค้าน)

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

$\overline{AB} = \overline{AC}$ (Δ หน้าจั่ว)

กำหนดให้.....

ต้องการพิสูจน์ว่า.....

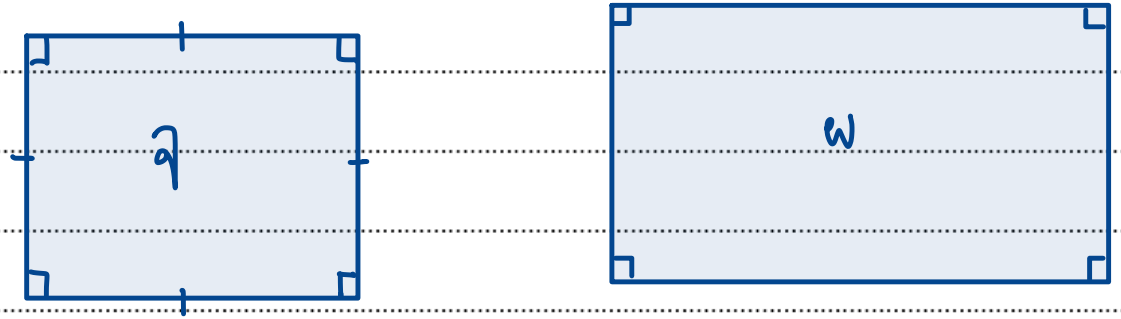
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

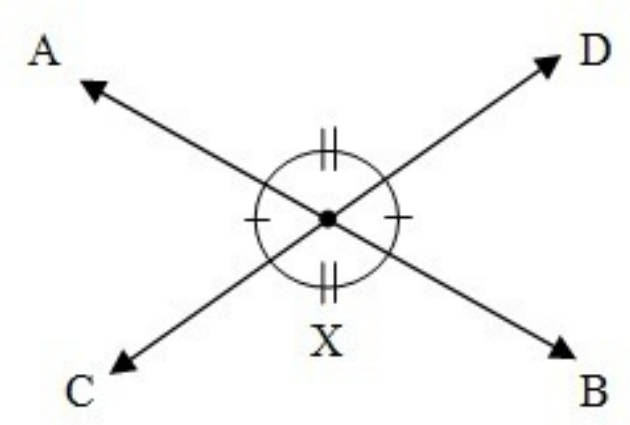
" ใช้ตัวอย่างค้าน "

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่าข้อความ “รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส” **ไม่เป็นจริง**

พิสูจน์.....



ทฤษฎีบท 1 ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้ว มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

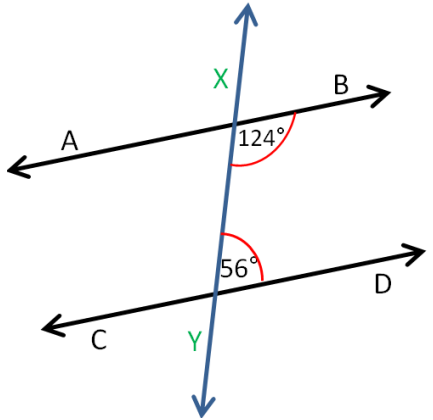


ทฤษฎีบท 2 เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน **ก็ต่อเมื่อ** ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

เขียนในรูปประโยคเงื่อนไข ได้ดังนี้

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด **แล้ว**ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา **แล้ว**เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

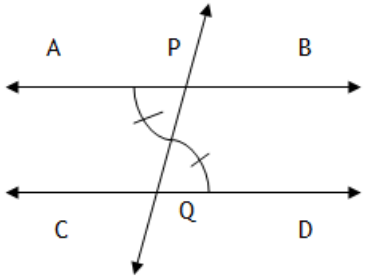


ทฤษฎีบท 3 เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน **ก็ต่อเมื่อ** มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

เขียนในรูปประโยคเงื่อนไข ได้ดังนี้

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด **แล้ว**มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน **แล้ว**เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

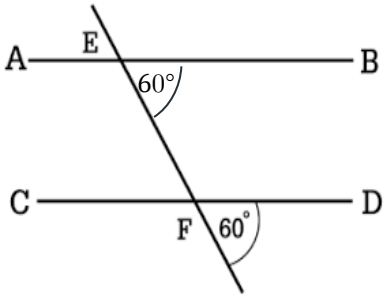


ทฤษฎีบท 4 เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน **ก็ต่อเมื่อ** มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

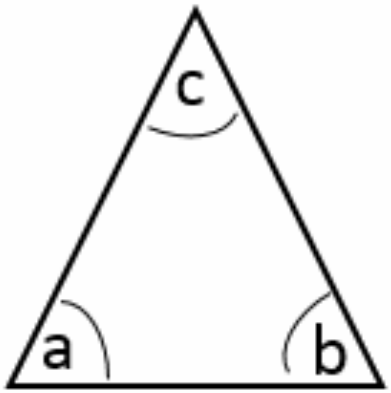
เขียนในรูปประโยคเงื่อนไข ได้ดังนี้

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด **แล้ว**มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

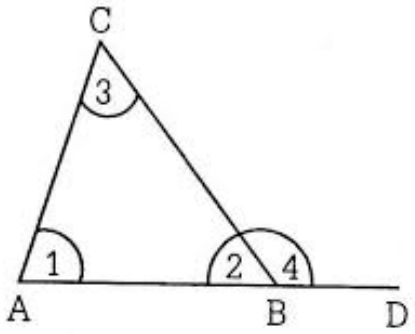
ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน **แล้ว**เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



ทฤษฎีบท 5 ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา



ทฤษฎีบท 6 ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น



หน้า 191

1. จากรูป กำหนด $\hat{1} = \hat{4}$ จงพิสูจน์ว่า $\hat{2} + \hat{3} = 180°$

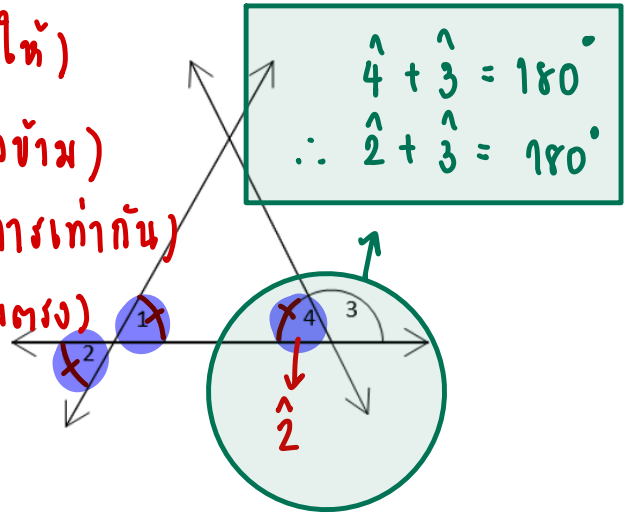
$\hat{1} = \hat{4}$ (กำหนดให้)

$\hat{1} = \hat{2}$ (มุมตรงข้าม)

จะได้ว่า $\hat{2} = \hat{4}$ (สมบัติการเท่ากัน)

เนื่องจาก $\hat{4} + \hat{3} = 180°$ (มุมตรง)

ดังนั้น $\hat{2} + \hat{3} = 180°$



$\therefore \hat{4} + \hat{3} = 180°$

$\therefore \hat{2} + \hat{3} = 180°$

กำหนดให้.....

ต้องการพิสูจน์ว่า.....

1 การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง **สร้าง** $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$	

การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$

การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$

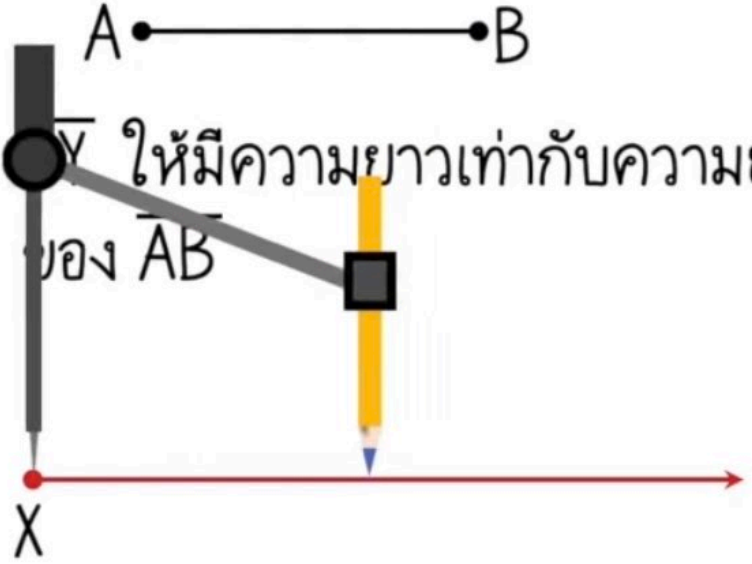
การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$

การสร้างพื้นฐาน

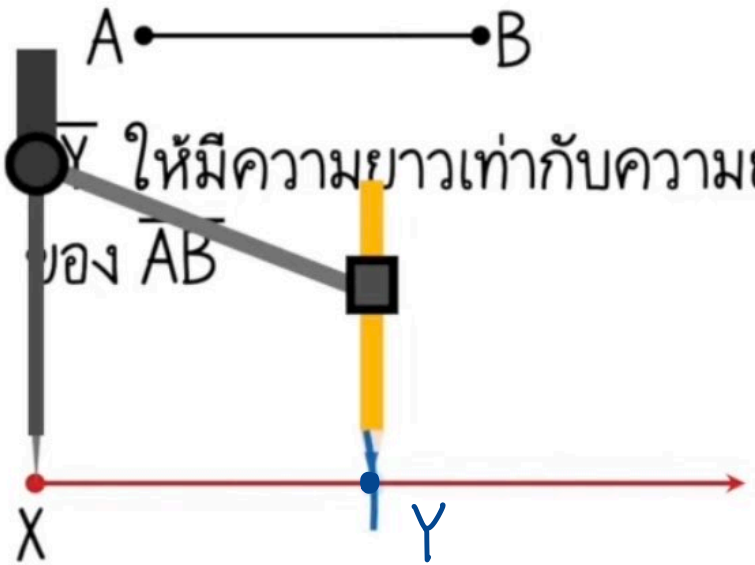
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง



สร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$

การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง



สร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$

การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$

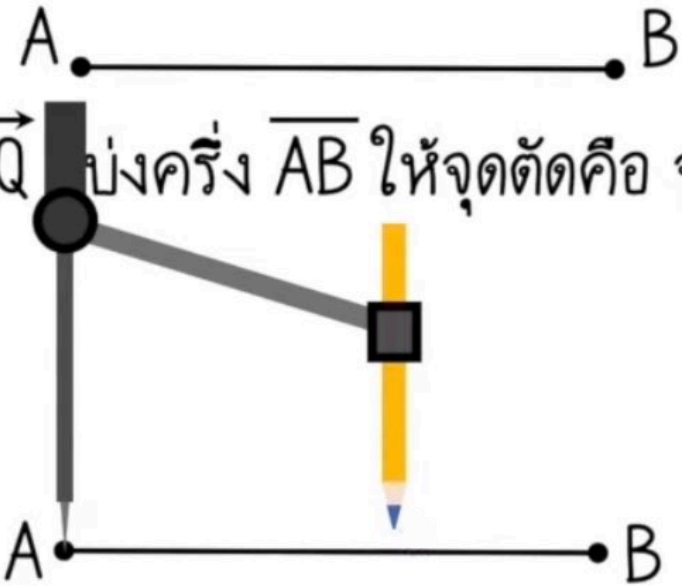
1 การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง **สร้าง** $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$ 	จากรูปที่สร้าง จะได้ $XY = AB$ เพราะว่า ในการสร้าง $\overline{XY}$ ใช้รัศมียาวเท่ากับ AB

2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

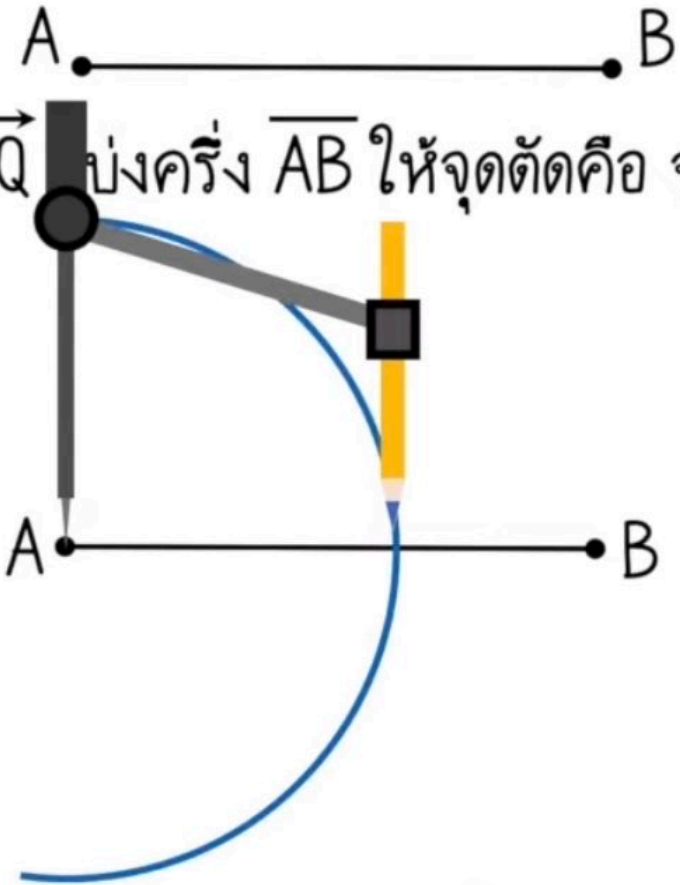
การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง **สร้าง** $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C	

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง



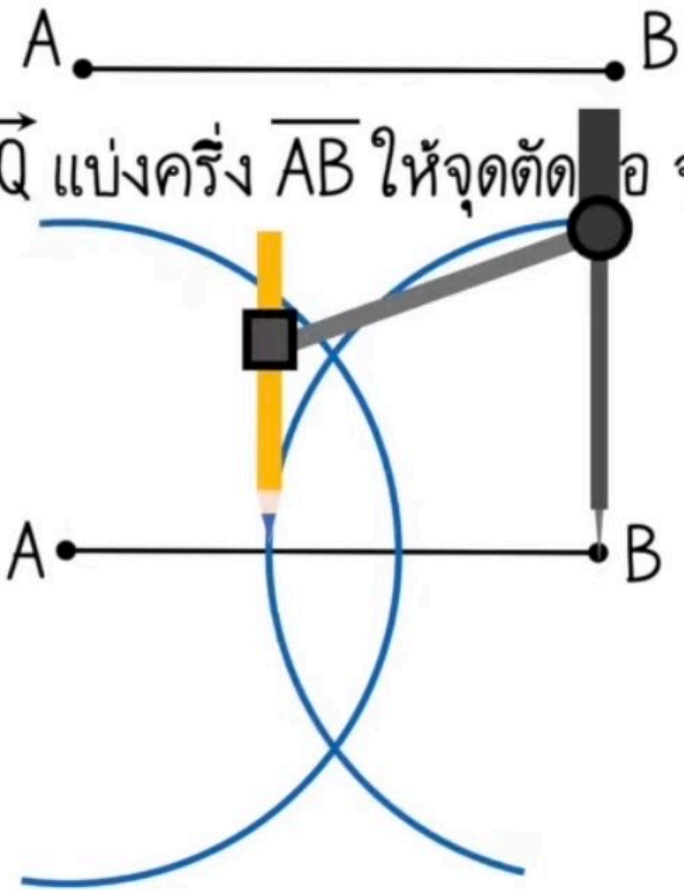
สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง



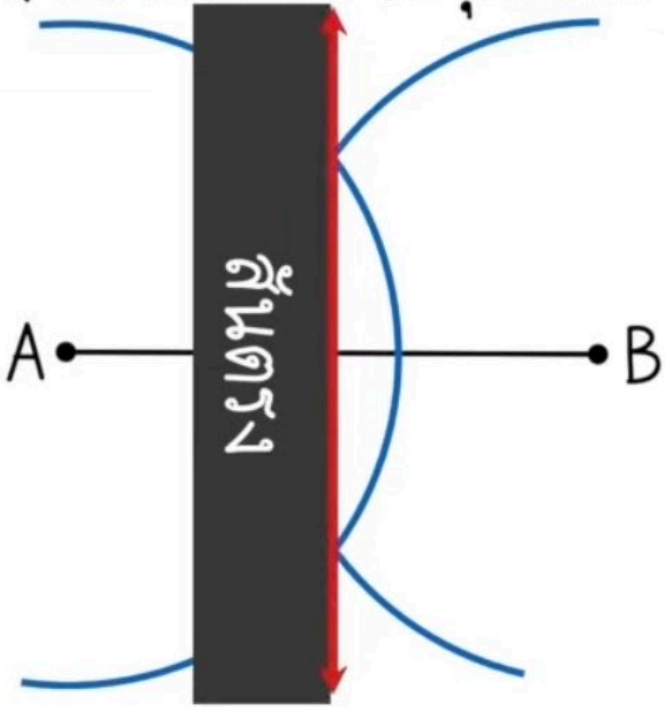
สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง



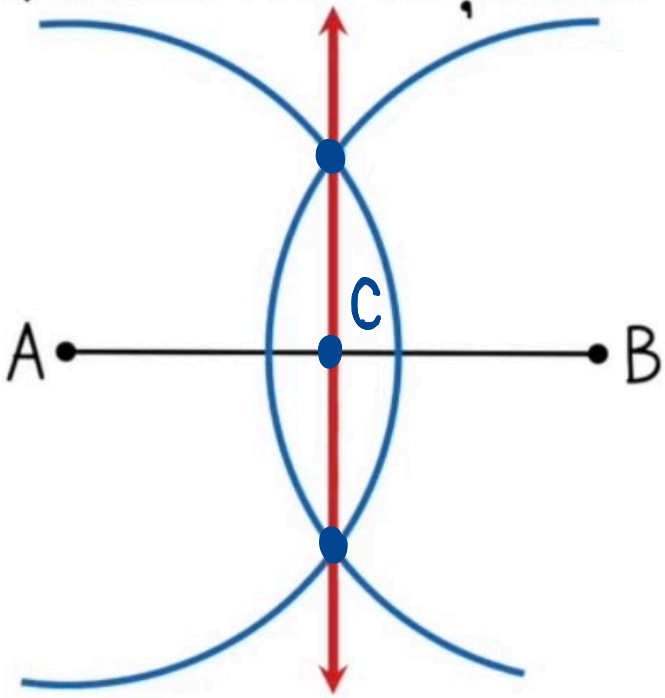
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C



กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C

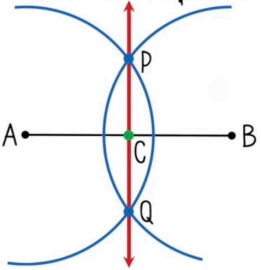


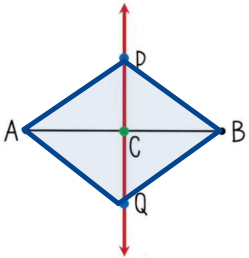
2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C



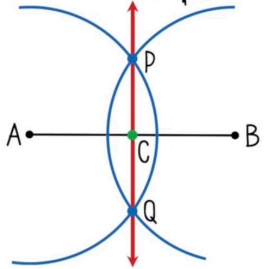


2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

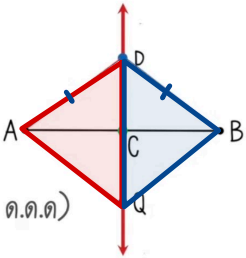
สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C



การให้เหตุผล

ลาก $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{AQ}$ และ $\overline{QB}$

$\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด)

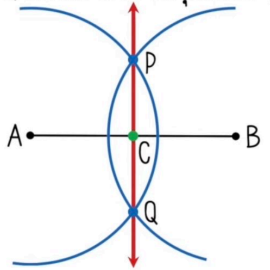


2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C



การให้เหตุผล

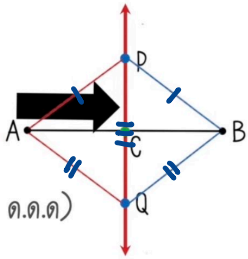
ลาก $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{AQ}$ และ $\overline{QB}$

$\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด)

เพราะ $AP = BP$ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

$AQ = BQ$ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

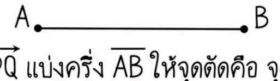
$PQ = PQ$ ($\overline{PQ}$ เป็นด้านร่วม)



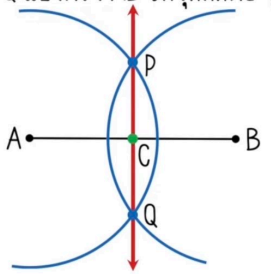
2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน

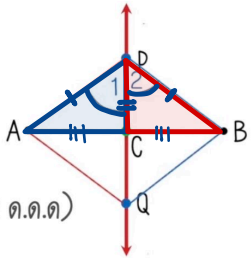
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง



สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ให้จุดตัดคือ จุด C



การให้เหตุผล



ลาก $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{AQ}$ และ $\overline{QB}$

$\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด)

เพราะ $AP = BP$ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

$AQ = BQ$ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

$PQ = PQ$ ($\overline{PQ}$ เป็นด้านร่วม)

จะได้ $\hat{1} = \hat{2}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

$\triangle APC \cong \triangle BPC$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.)

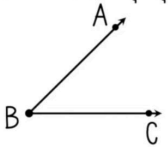
เพราะ $AP = BP$ (ใช้รัศมีร่วมกัน)

$\hat{1} = \hat{2}$ (จากการพิสูจน์ร่วมกัน)

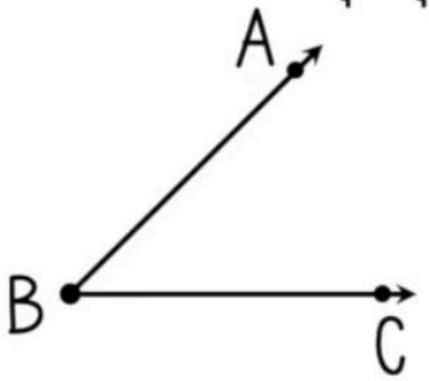
$PC = PC$ (เป็นด้านร่วม)

จะได้ $AC = CB$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของ $\triangle$ ที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

3 การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง  **สร้าง** $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$	

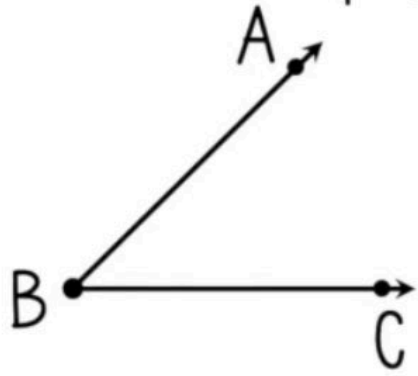
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$

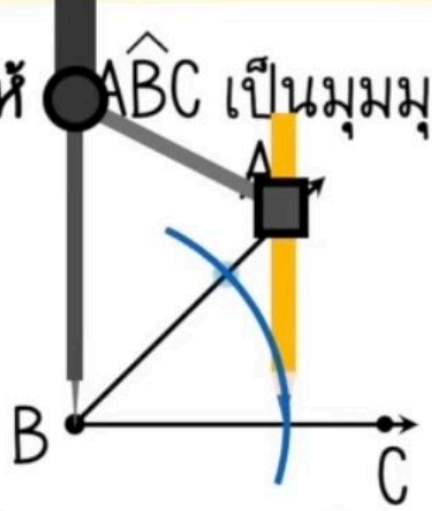
สันตรง

กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



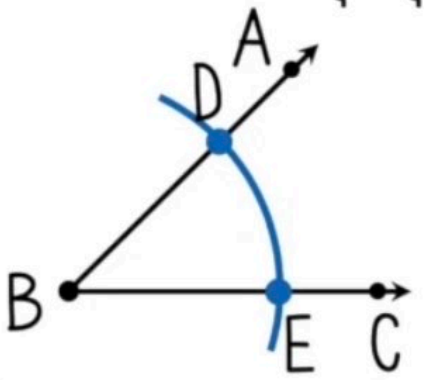
สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$

กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง

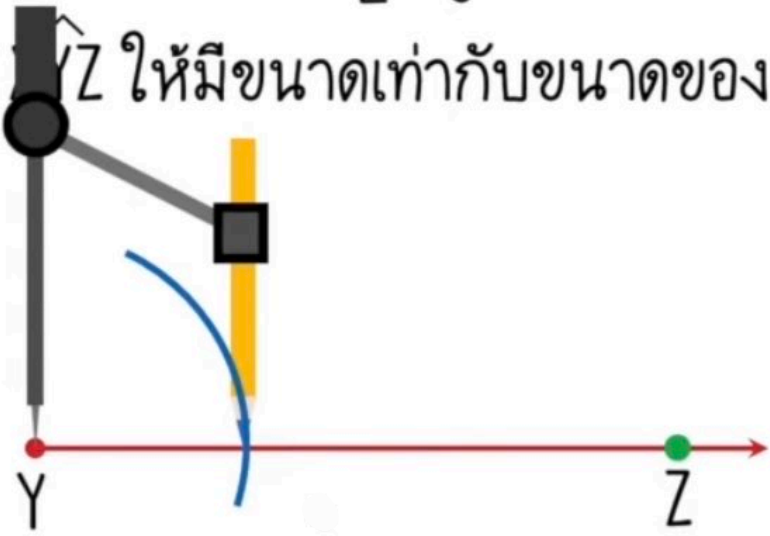


สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$

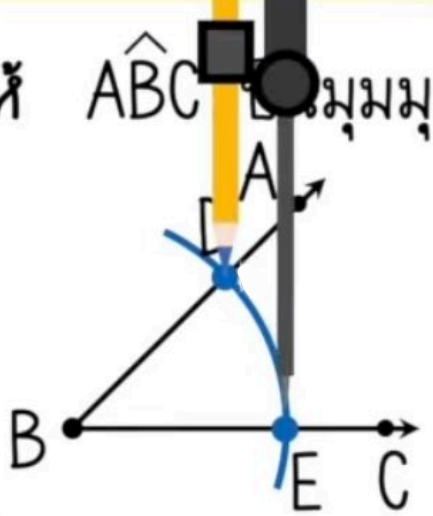
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



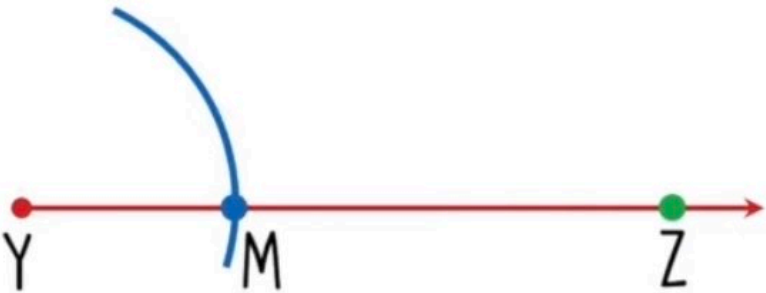
สร้าง $\hat{Z}$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$



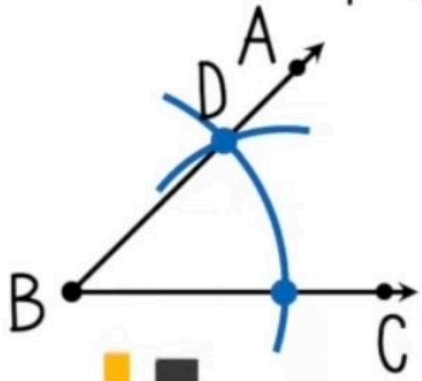
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



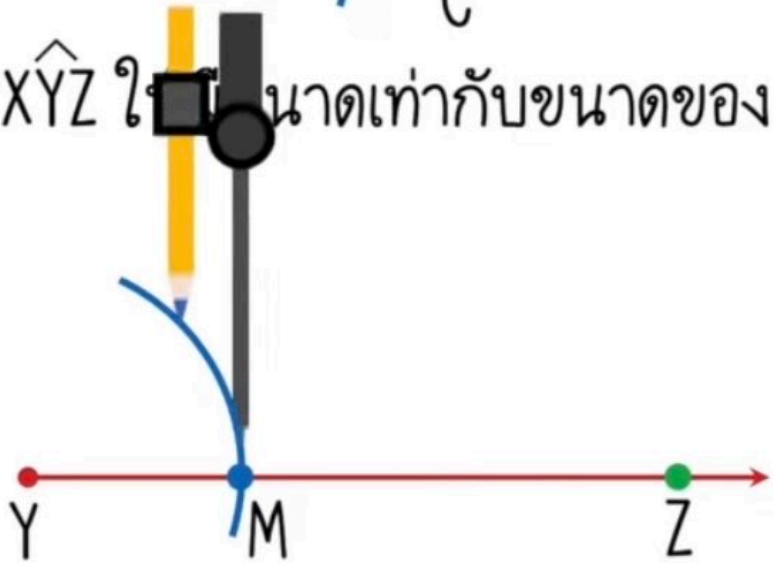
สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$



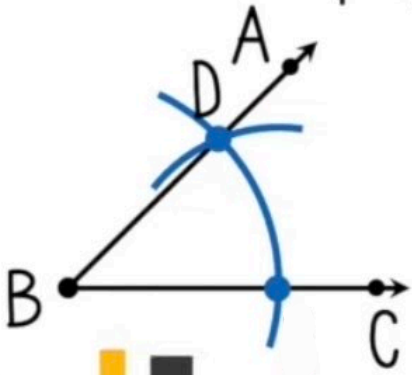
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



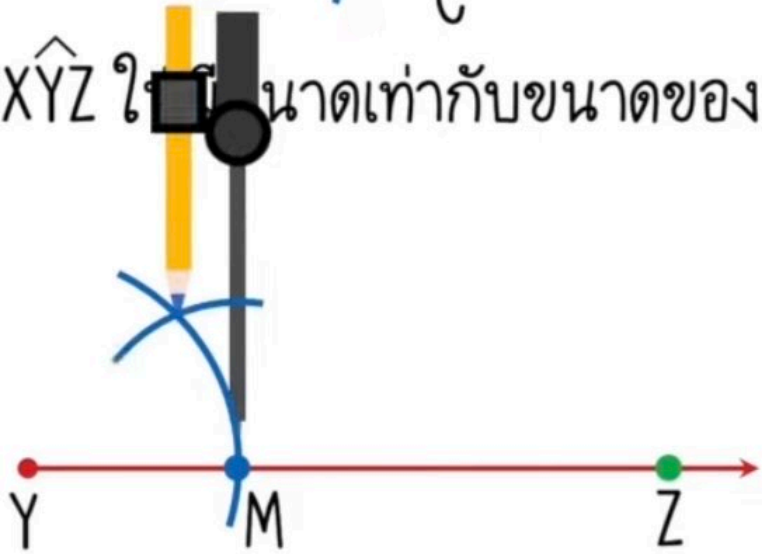
สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$



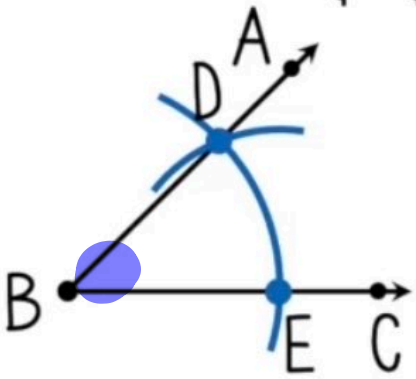
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



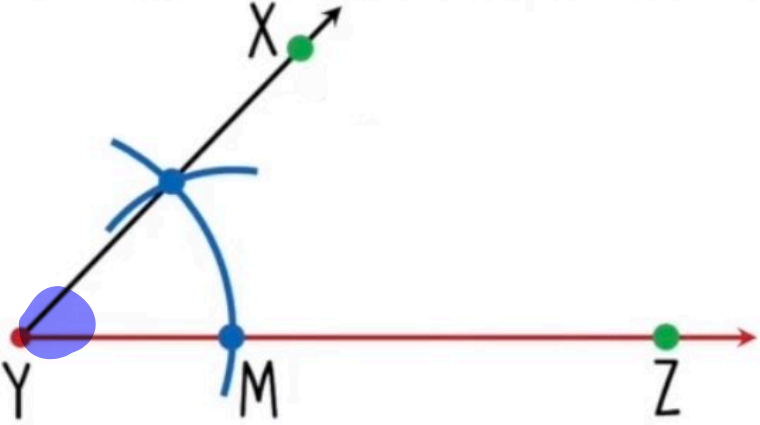
สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$



กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



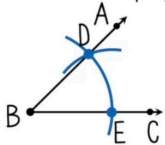
สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$



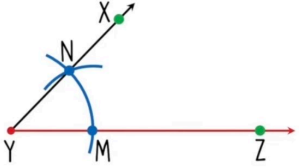
3 การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน

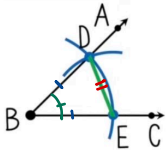
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง

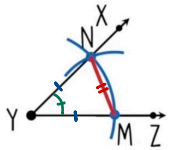


สร้าง $X\hat{Y}Z$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $A\hat{B}C$



การให้เหตุผล





ลาก $\overline{DE}$ และ $\overline{MN}$

$\triangle DBE \cong \triangle NYM$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด.)

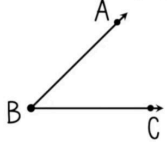
เพราะ $BD = YN$ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

$BE = YM$ (,, ——— ,,)

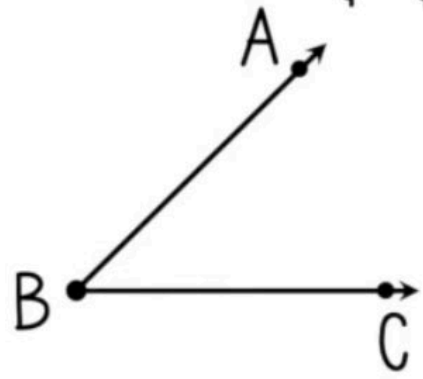
$DE = NM$ (,, ——— ,,)

จะได้ $\hat{B} = \hat{Y}$ (มุมที่สมนัยกันของ $\triangle$ ที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน.)

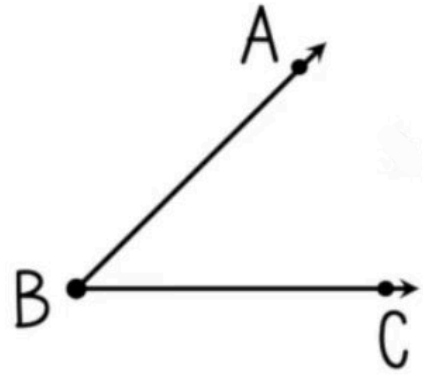
4 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง  **สร้าง** $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$	

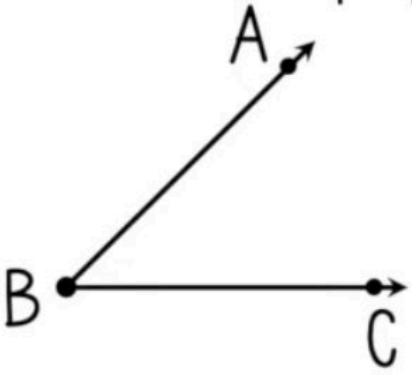
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



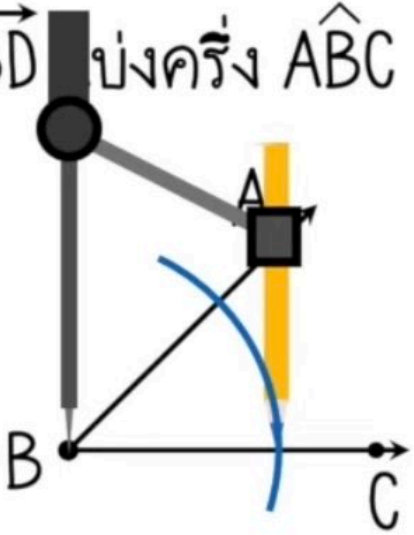
สร้าง $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$



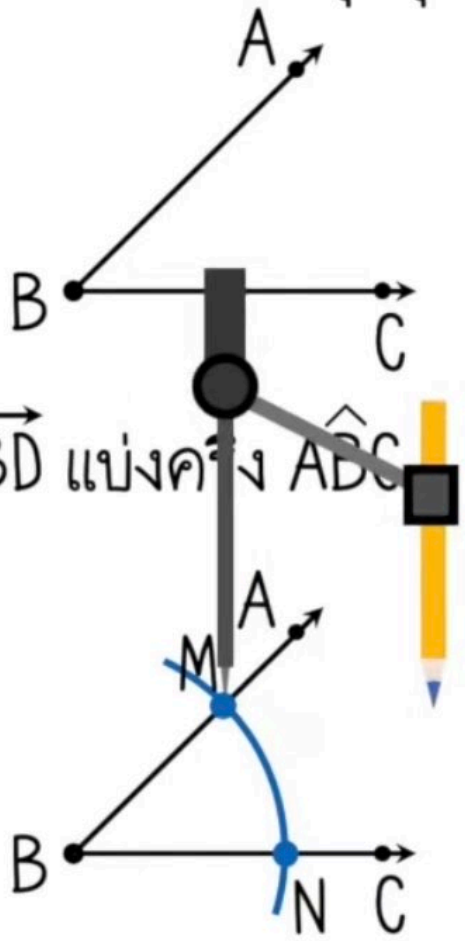
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



สร้าง $\overrightarrow{BD}$ บ่งครึ่ง $A\hat{B}C$

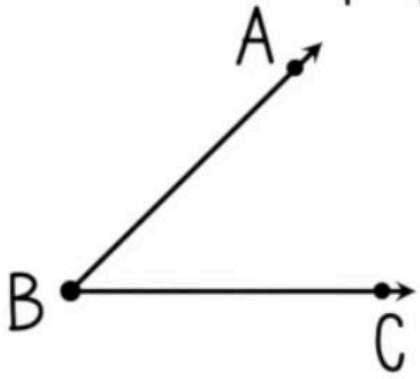


กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง

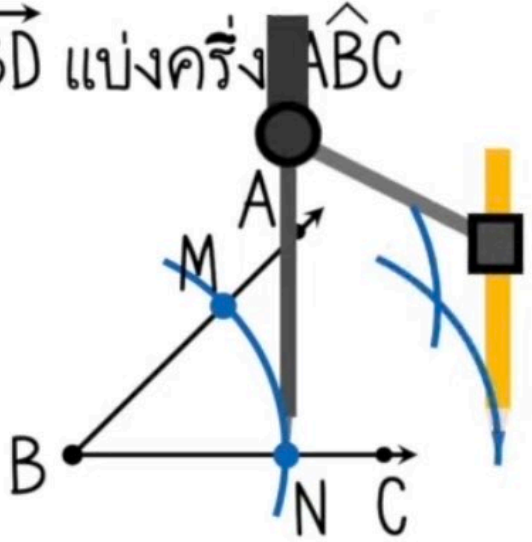


สร้าง $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$

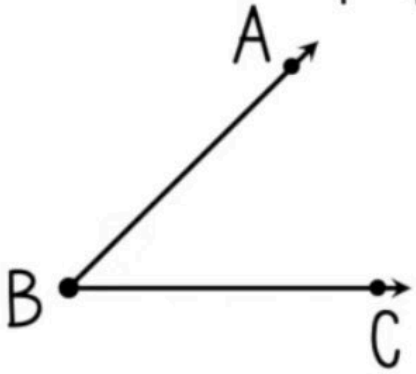
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



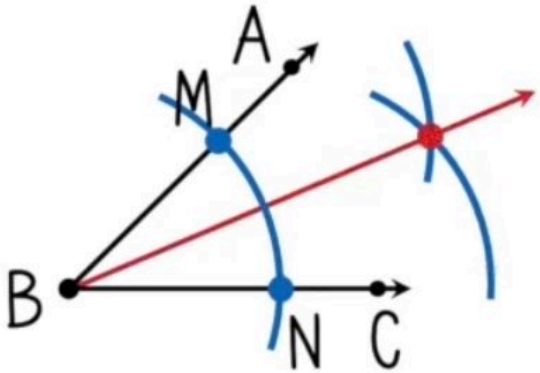
สร้าง $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$



กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



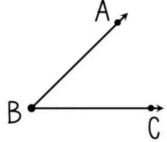
สร้าง $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$



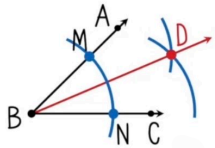
4 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน

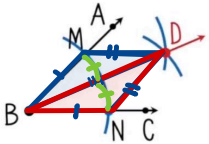
กำหนดให้ $A\hat{B}C$ เป็นมุมมุมหนึ่ง



สร้าง $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$



การให้เหตุผล



ลาก $\overline{MD}$ และ $\overline{ND}$

$\triangle BMD \cong \triangle BND$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด.)

เพราะ $BM = BN$ (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

$MD = ND$ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

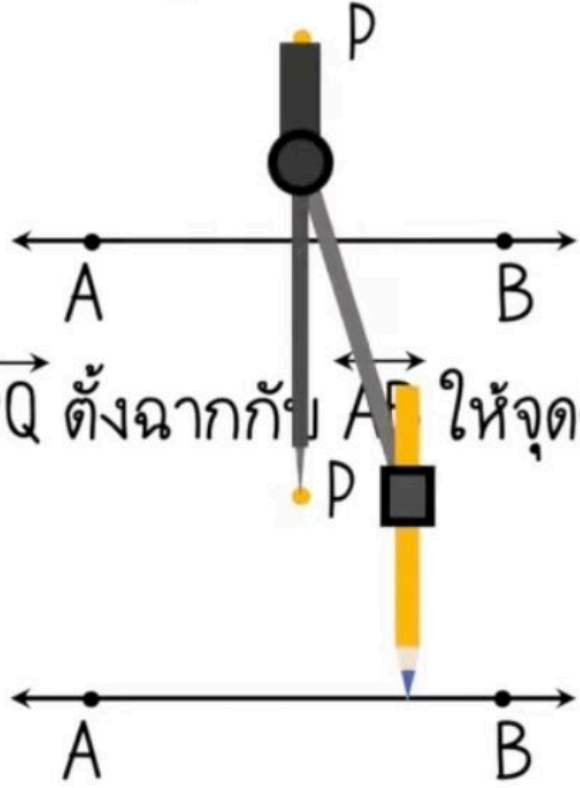
$BD = BD$ (เป็นด้านร่วม)

จะได้ $M\hat{B}D = N\hat{B}D$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของ $\triangle$ ที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

5 การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

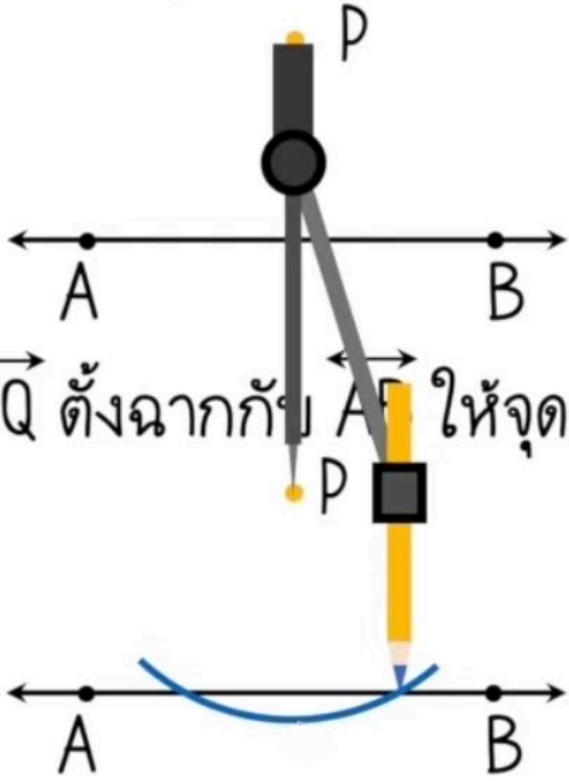
การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$ • P **สร้าง** $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C	

กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$



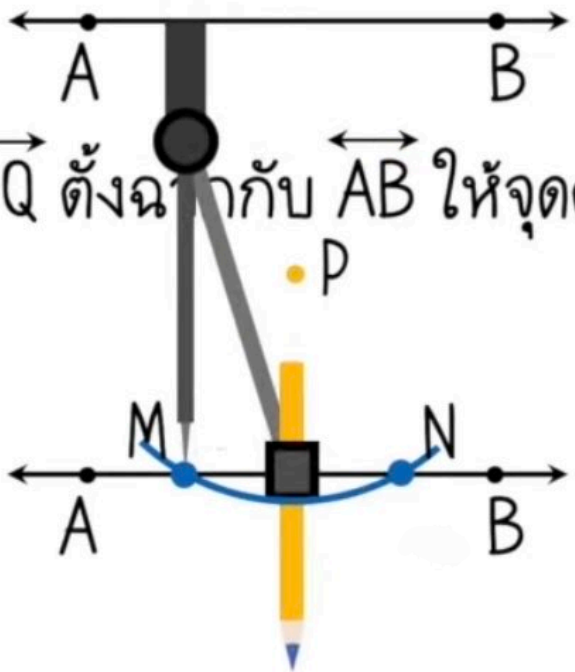
สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C

กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$



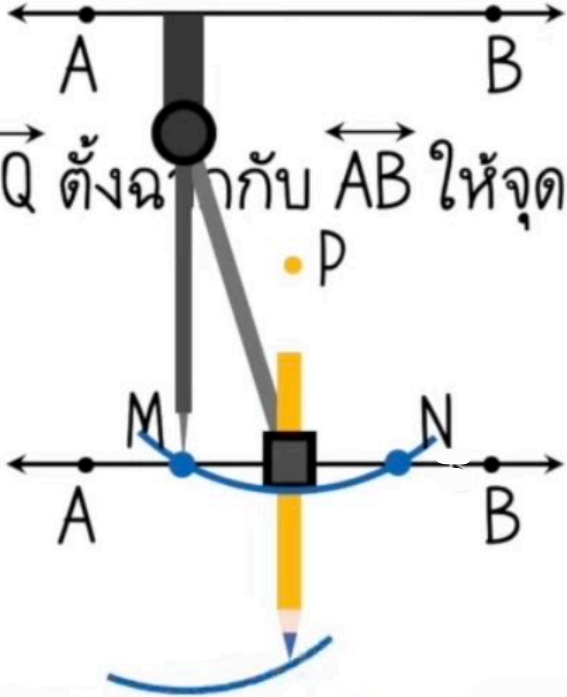
สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C

กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$



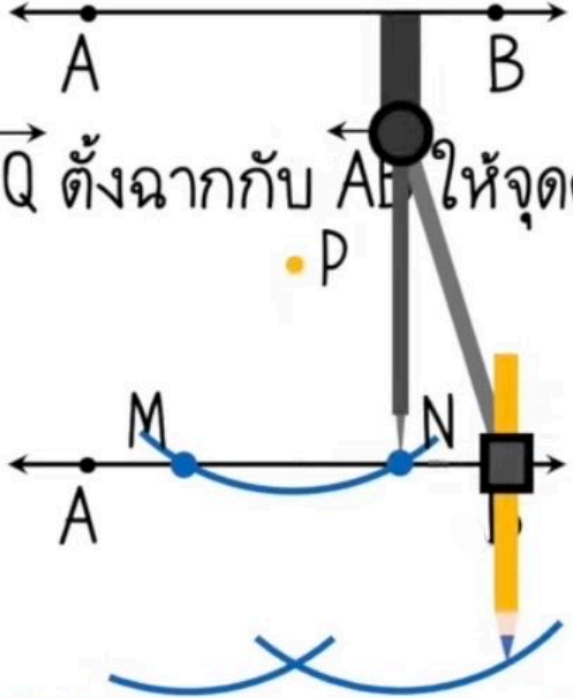
สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C

กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$



สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C

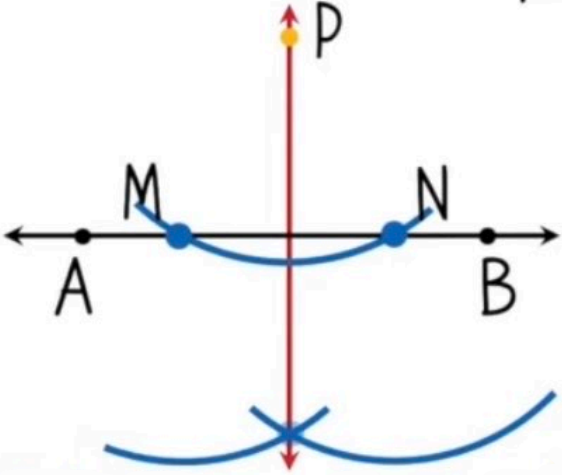
กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$



สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C

กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่ง
ที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$

สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C



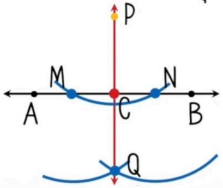
5 การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน

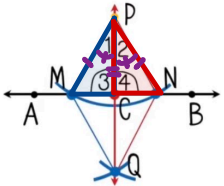
กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$

• P

สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ให้จุดตัด คือ จุด C



การให้เหตุผล



ลาก $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{NP}$ และ $\overline{NQ}$

$\triangle MPQ \cong \triangle NPQ$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด.)

เพราะ MP = NP (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

MQ = NQ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

PQ = PQ (เป็นด้านร่วม)

จะได้ $\hat{1} = \hat{2}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของ $\triangle$ ที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

$\because \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$

$\therefore \hat{3} = 90^\circ = \hat{4}$

$\triangle MPC \cong \triangle NPC$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.)

เพราะ MP = NP (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

$\hat{1} = \hat{2}$ (จากการพิสูจน์ข้างต้น)

PC = PC (เป็นด้านร่วม)

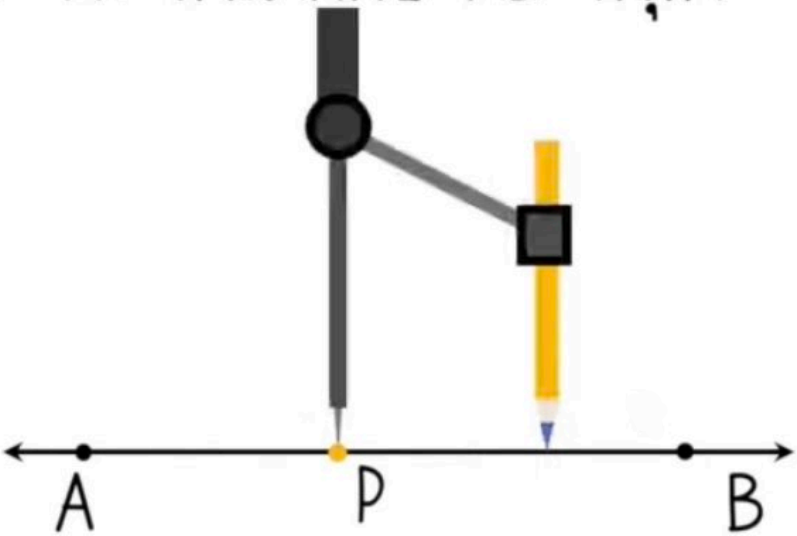
จะได้ $\hat{3} = \hat{4}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของ $\triangle$ ที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

6 การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งที่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$ **สร้าง** $\overrightarrow{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P	

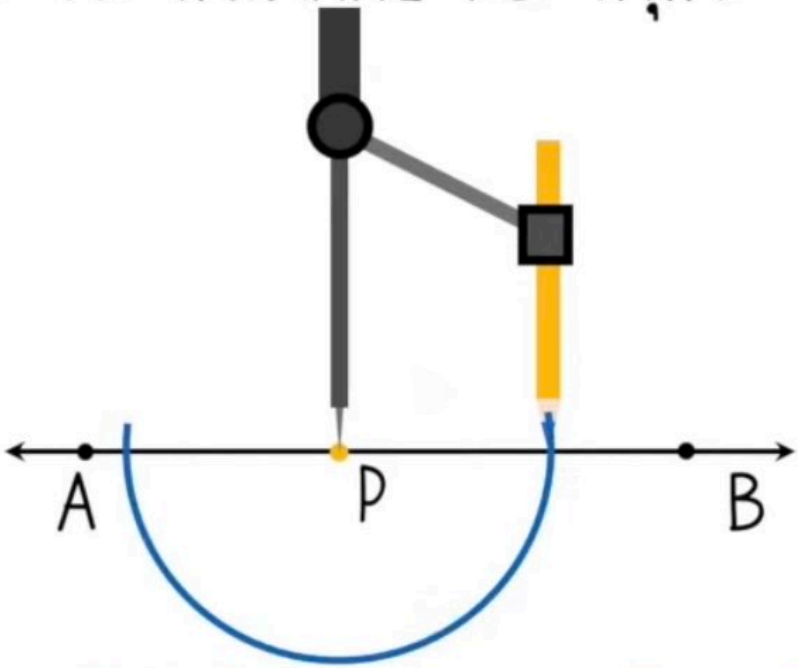
กำหนดให้ จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$

สร้าง $\overrightarrow{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P

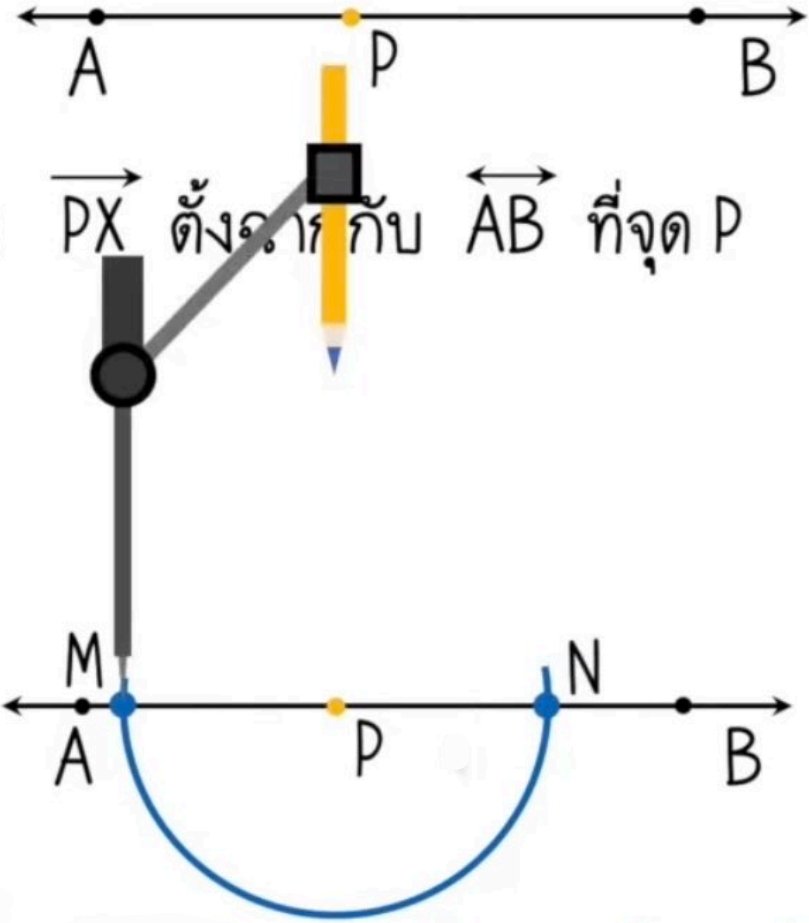


กำหนดให้ จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$

สร้าง $\overrightarrow{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P

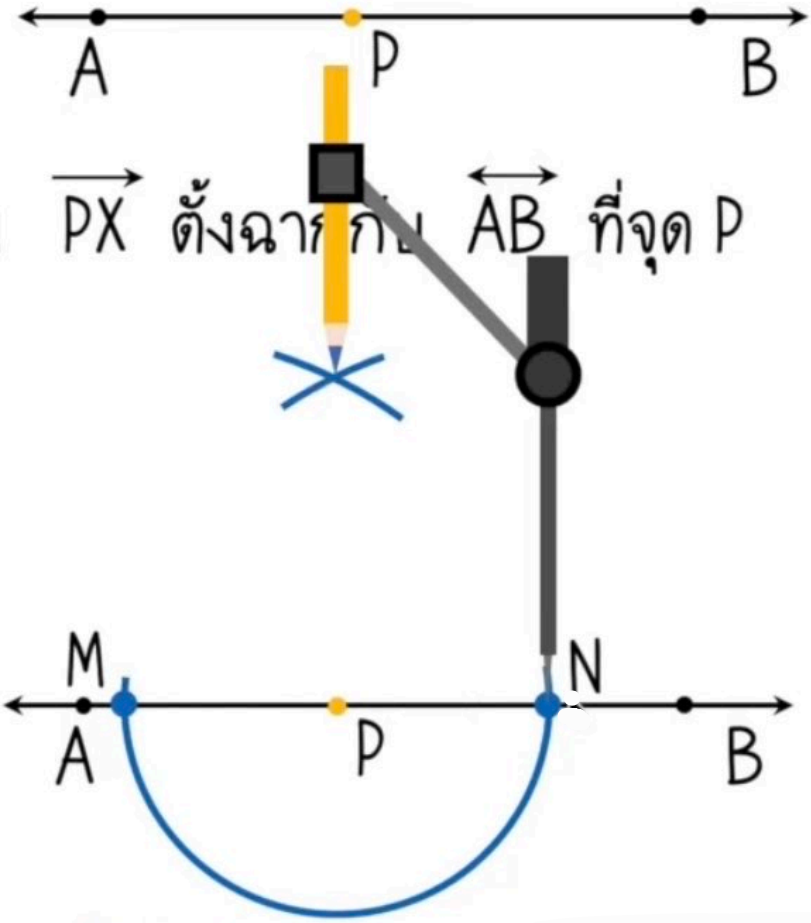


กำหนดให้ จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$



สร้าง $\overrightarrow{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P

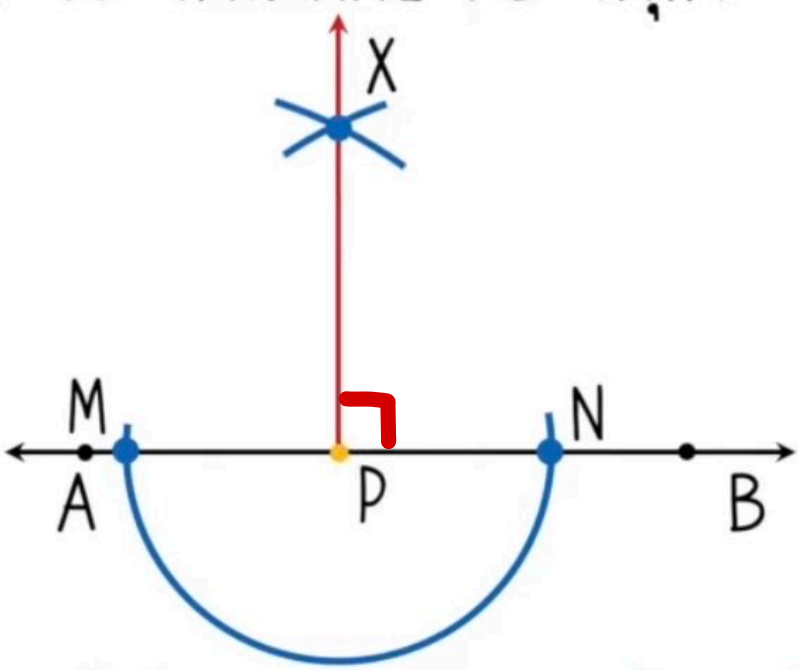
กำหนดให้ จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$



สร้าง $\overrightarrow{PX}$ ตั้งฉาก $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P

กำหนดให้ จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$

สร้าง $\overrightarrow{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P

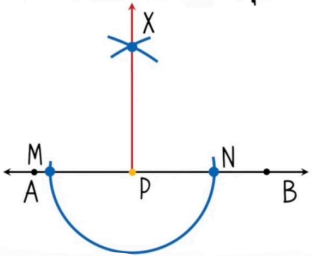


6 การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งที่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้

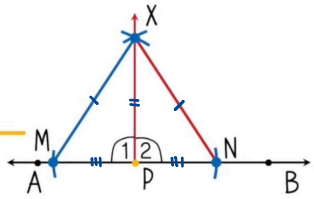
การสร้างพื้นฐาน

กำหนดให้ จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$

สร้าง $\overrightarrow{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P



การให้เหตุผล



ลาก $\overline{MX}$ และ $\overline{NX}$

$\triangle MXP \cong \triangle NXP$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด.)

เพราะ $MX = NX$ (รัศมีของวงกลมเดียว)

$XP = XP$ (เป็นด้านร่วม)

$MP = NP$ (ใช้รัศมียาวเท่ากัน)

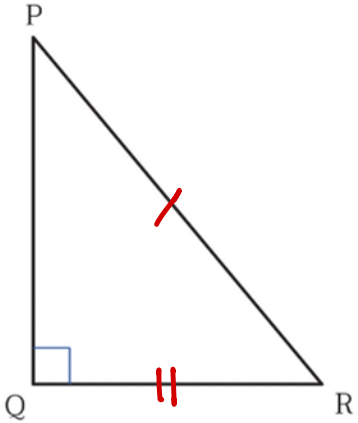
จะได้ $\hat{1} = \hat{2}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของ $\triangle$ ที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

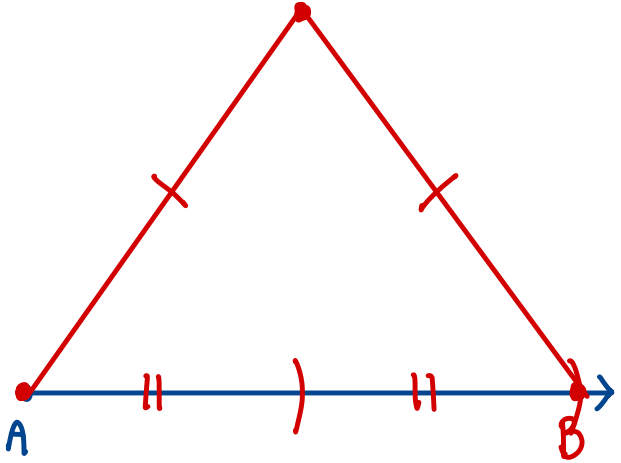
เนื่องจาก $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

ดังนั้น $\hat{1} = \hat{2} = 90^\circ$ องศา (สมบัติการเท่ากัน)

น. 209

4) กำหนด ΔPQR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



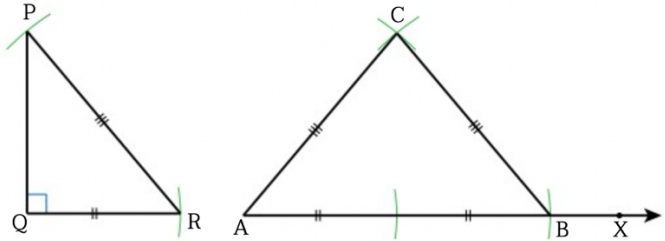


จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากับ $\overline{PR}$ และฐานยาวเป็นสองเท่าของ $\overline{QR}$

วิธีการสร้าง

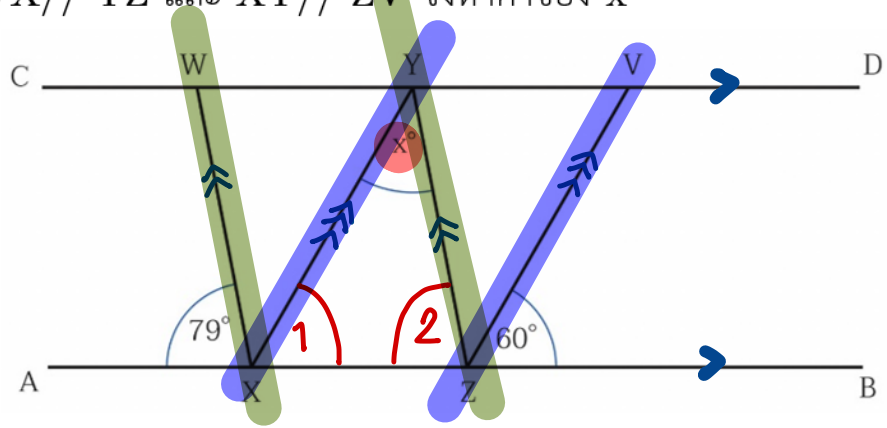
1. สร้าง $\overrightarrow{AX}$
2. บน $\overrightarrow{AX}$ สร้าง $\overline{AB}$ ยาวเป็นสองเท่าของ QR
3. ใช้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ PR เขียนส่วนโค้งให้ตัดกันที่จุด C
4. ลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$

จะได้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตามต้องการ



น. 227

2. จากรูป $\overline{AB}$// $\overline{CD}$, $\overline{WX}$// $\overline{YZ}$ และ $\overline{XY}$// $\overline{ZV}$ จงหาค่าของ x



กำหนดให้ $\overline{AB} // \overline{CD}$, $\overline{WX} // \overline{YZ}$ และ $\overline{XY} // \overline{ZV}$

สิ่งที่โจทย์ต้องการ

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{x} = 180^\circ$

$60^\circ + 79^\circ + \hat{x} = 180^\circ$

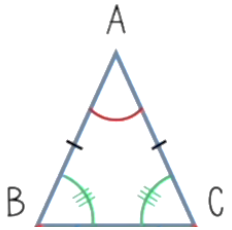
$139^\circ + x^\circ = 180^\circ$

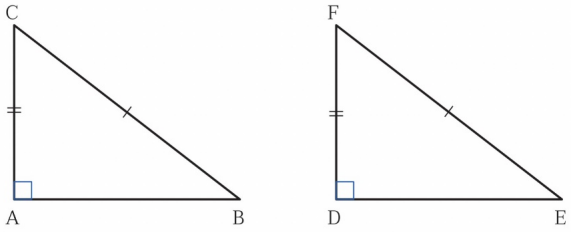
$x^\circ = 180^\circ - 139^\circ$

$x^\circ = 41^\circ$

สรุป ทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้ในบทนี้

ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน
ก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน



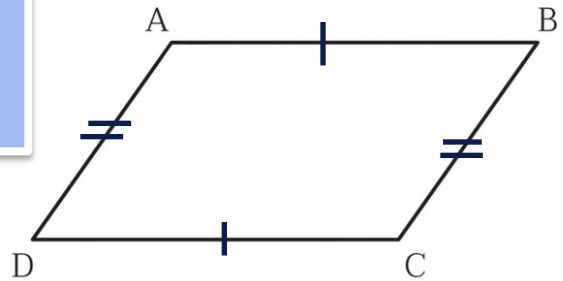


ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ
ฉาก–ด้าน–ด้าน (ฉ.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉาก
ยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกหนึ่งคู่ยาวเท่ากัน แล้วรูป
สามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

สรุป ทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้ในบทนี้

ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน

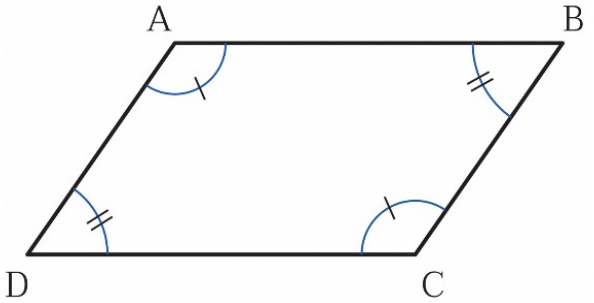
ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



สรุป ทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้ในบทนี้

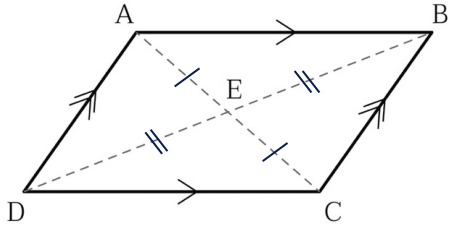
มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน

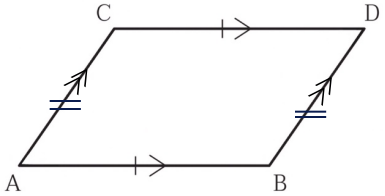
ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

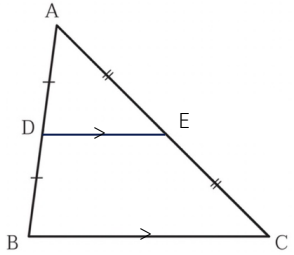


สรุป ทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้ในบทนี้

เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม





ส่วนของเส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากัน จะขนานกันและยาวเท่ากัน

ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาว เป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม