

ความเท่ากันทุกประการ

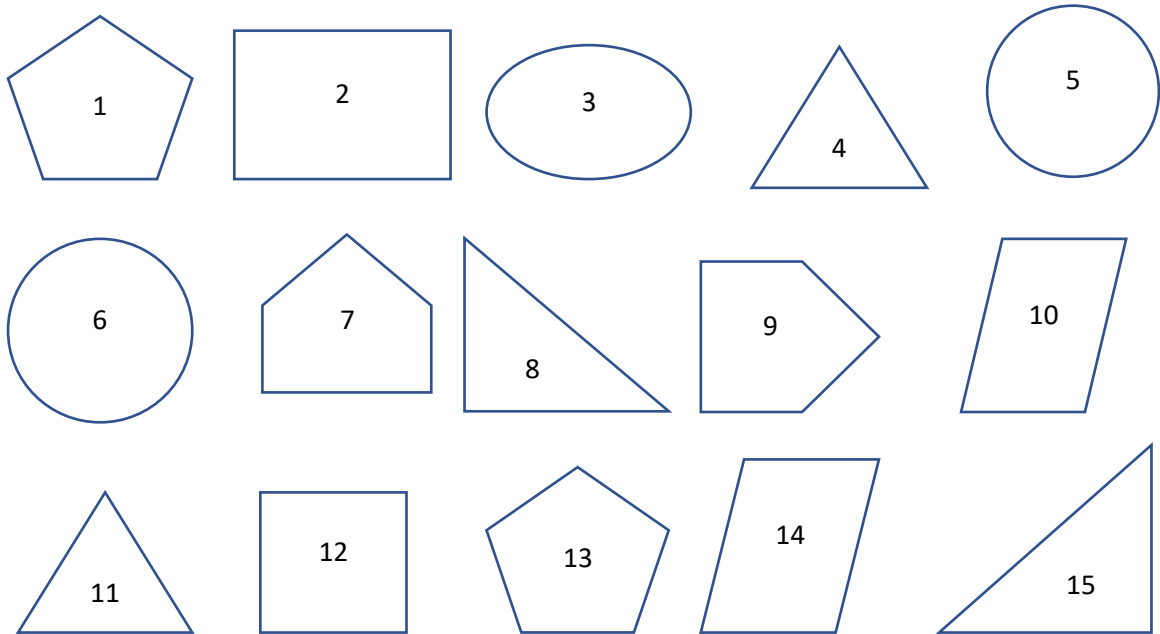
Congruence

ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

บทนิยาม รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ สามารถนำรูปหนึ่งทับกับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี
แทนด้วยสัญลักษณ์ $\cong$

จะได้ว่า รูปเรขาคณิต A เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต B เขียนแทนด้วย $A \cong B$

กิจกรรม รูปคู่ใดบ้างที่เท่ากันทุกประการ



$5 \cong 6$, $1 \cong 13$, $14 \cong 10$,

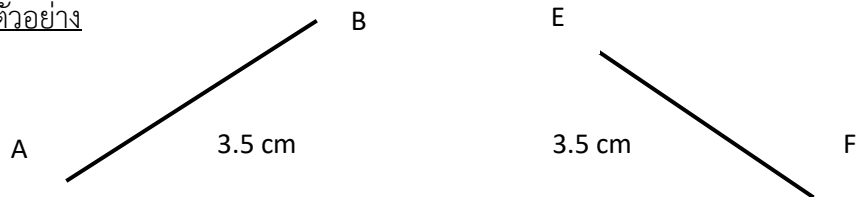
$4 \cong 11$, $8 \cong 15$, $7 \cong 9$

รูปเรขาคณิตสองรูปจะเท่ากันทุกประการ
ก็ต่อเมื่อ มีรูปร่างและขนาดเท่ากัน.

สมบัติของความเท่ากันทุกประการ

1. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อส่วนของเส้นตรงทั้งสองนั้นมีความยาวเท่ากัน

ตัวอย่าง



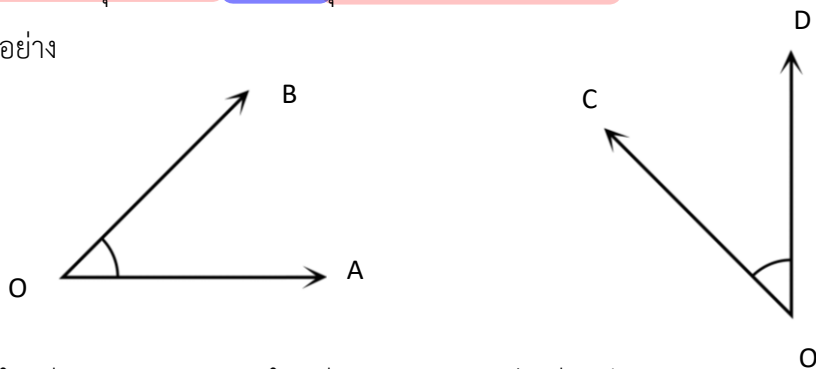
$\overline{AB}$ มีความยาว 3.5 cm และ $\overline{EF}$ มีความยาว 3.5 cm เช่นเดียวกัน

ดังนั้น $AB = EF$

นั่นคือ $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

2. มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่าง



$\angle BOA$ มีขนาด 45° และ $\angle COD$ มีความยาว 45° เช่นเดียวกัน

ดังนั้น $\angle BOA = \angle COD$

นั่นคือ $\angle BOA \cong \angle COD$

3. เส้นตรงสองเส้นใด ๆ เท่ากันทุกประการเสมอ และ รัศมีสองเส้นใด ๆ เท่ากันทุกประการเสมอ

4. รูปวงกลมเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ

วงกลมทั้งสองนั้นมีรัศมีเท่ากัน หรือมีพื้นที่เท่ากัน หรือมีเส้นรอบวงเท่ากัน

5. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ

สี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองนั้นมีด้านยาวเท่ากัน หรือมีพื้นที่เท่ากัน หรือมีความยาวรอบรูปเท่ากัน

หรือมีเส้นทแยงมุมเท่ากัน

6. $A \cong A$ (สมบัติสะท้อน)

รูปเรขาคณิตใด ๆ จะเท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิตรูปนั้น

7. ถ้า $A \cong B$ แล้ว $B \cong A$ (สมบัติสมมาตร)

8. ถ้า $A \cong B$ และ $B \cong C$ แล้ว $A \cong C$ (สมบัติการถ่ายทอด)

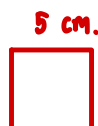
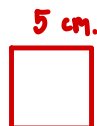
แบบฝึกหัดที่ 1

ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ จงอธิบาย

1. ถ้า $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ และ $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ แล้ว $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

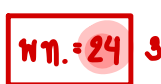
2. ถ้า $\hat{A} \cong \hat{B}$ แล้ว $\hat{B} \cong \hat{A}$

3. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ



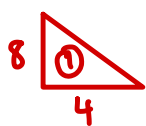
จริง เพราะ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านแต่ละด้านเท่ากัน ทำให้ [จ] ทั้งสองรูป
ขนาดและรูปร่างเท่ากัน. ดังนั้น [จ] สองรูป จึงเท่ากันทุกประการ.

4. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ



ไม่จริง เพราะ [ผ] สองรูป รูปร่างและขนาดไม่เท่ากัน.
เกิดจากด้านกว้างและด้านยาวที่ไม่เท่ากัน.

5. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ



$$\text{พท.} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

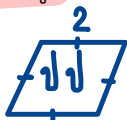
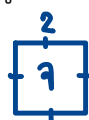
ไม่จริง เพราะ Δ สองรูป รูปร่างไม่เหมือนกัน
ทั้งกันไม่สนิท.

7. รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ



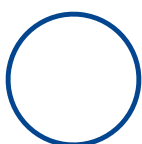
8. รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปที่สร้างโดยใช้รัศมีของวงกลมเดียวกันจะเท่ากันทุกประการ

9. รูปสี่เหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสี่คู่ จะเท่ากันทุกประการ



ไม่จริง

10. วงกลมสองวงที่มีเส้นรอบวงยาวเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ

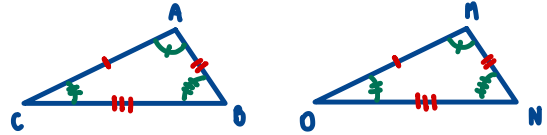


จริง

ข้อควรระวัง

ลักษณะต่อไปนี้ ไม่จำเป็นต้องต้องเท่ากันทุกประการ

1. รูปสี่เหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน (ยกเว้นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)
2. รูปสี่เหลี่ยมสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน (ยกเว้นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)
3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมทั้งสามคู่เท่ากัน
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน

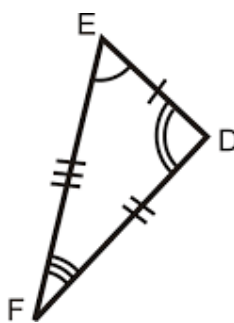
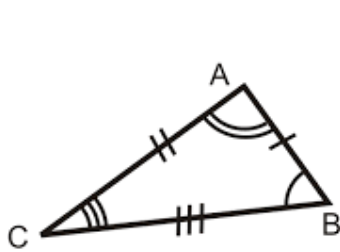


การเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

นิยาม รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อด้านคู่สมนัยและมุมคู่สมนัยของสามเหลี่ยมทุกคู่มีขนาดเท่ากัน

ด้านคู่สมนัยและมุมคู่สมนัย

ตัวอย่าง จงเขียนมุมคู่สมนัยและด้านคู่สมนัยดังต่อไปนี้



$$\hat{A} = \hat{D}$$

$$\hat{B} = \hat{E}$$

$$\hat{C} = \hat{F}$$

$$AB = DE$$

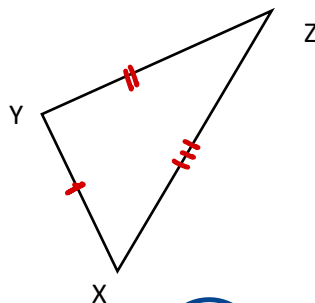
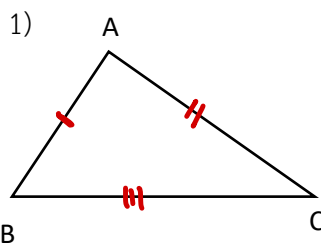
$$BC = EF$$

$$AC = FD$$

หน้า 75

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้เท่ากันทุกประการ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน



มุม

$$\hat{A} = \hat{Y}$$

$$\hat{C} = \hat{Z}$$

$$\hat{B} = \hat{X}$$

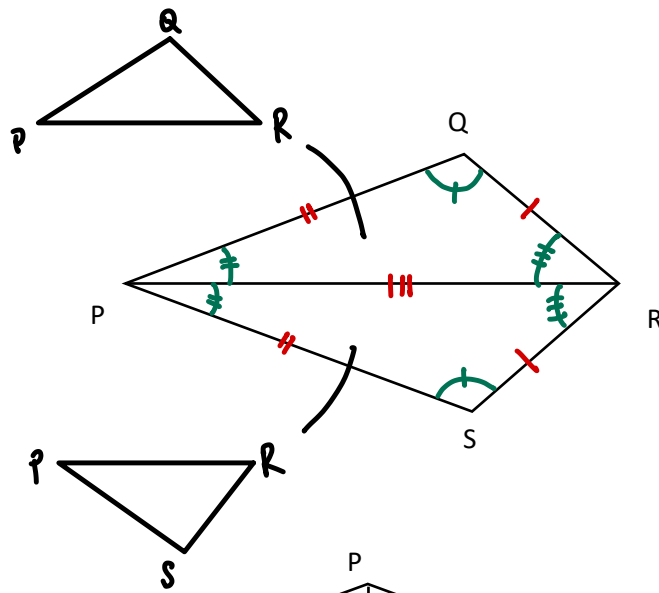
ด้าน

$$\overline{AB} = \overline{XY}$$

$$\overline{AC} = \overline{YZ}$$

$$\overline{BC} = \overline{XZ}$$

2)



nh

$$\hat{Q} = \hat{S}$$

$$\hat{P} = \hat{P}$$

$$\hat{R} = \hat{R}$$

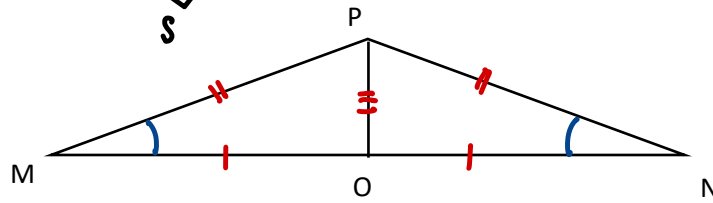
đầu

$$\overline{QR} = \overline{RS} \rightarrow \overline{RQ} = \overline{RS}$$

$$\overline{QP} = \overline{SP} \rightarrow \overline{PQ} = \overline{PS}$$

$$\overline{PR} = \overline{RP}$$

3)



nh

$$\hat{M} = \hat{N}$$

$$\hat{P} = \hat{P}$$

$$\hat{O} = \hat{O}$$

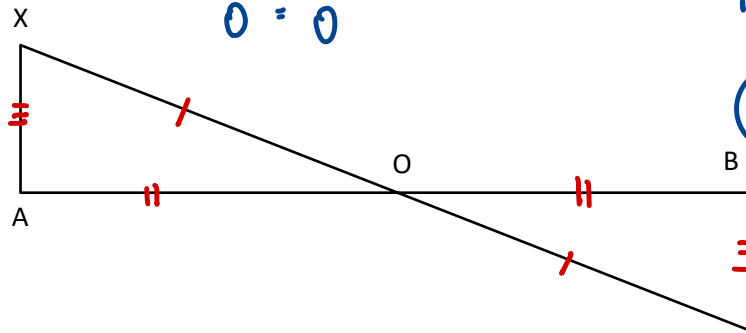
đầu

$$\overline{MO} = \overline{NO}$$

$$\overline{MP} = \overline{NP}$$

$$\overline{PO} = \overline{PO}$$

4)



nh

$$\hat{O} = \hat{O}$$

$$\hat{X} = \hat{Y}$$

$$\hat{A} = \hat{B}$$

đầu

$$\overline{XO} = \overline{YO}$$

$$\overline{AO} = \overline{BO}$$

$$\overline{XA} = \overline{YB}$$

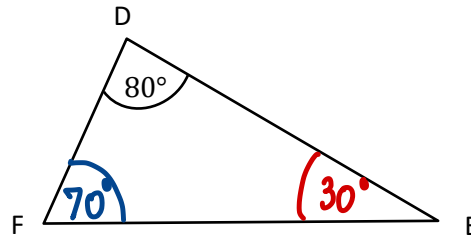
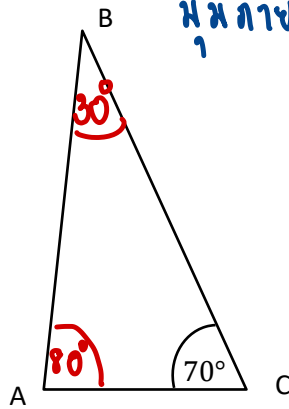
3. จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ จงหาขนาดของ $\hat{B}$ และ $\hat{F}$

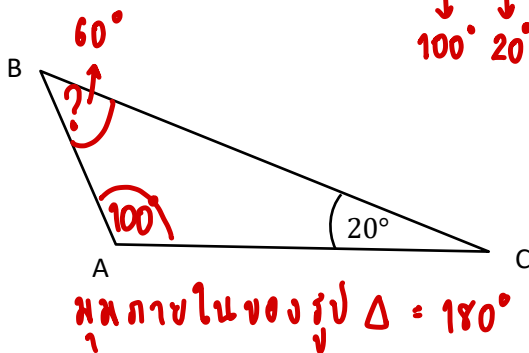
มุมภายในของรูป $\triangle = 180^\circ$

$$\hat{C} = \hat{F} \rightarrow 70^\circ$$

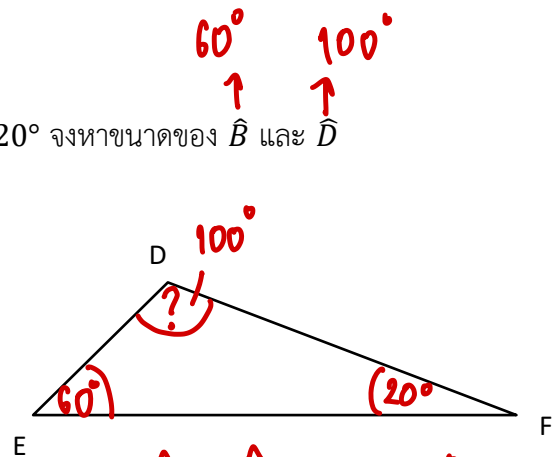
$$\hat{B} = \hat{E} \rightarrow 30^\circ$$



2) กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ และ $\hat{A} + \hat{C} = 120^\circ$ จงหาขนาดของ $\hat{B}$ และ $\hat{D}$



มุมภายในของรูป $\triangle = 180^\circ$



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{D} \rightarrow 100^\circ \\ \hat{B} &= \hat{E} \rightarrow 60^\circ \\ \hat{C} &= \hat{F} \rightarrow 20^\circ \end{aligned}$$

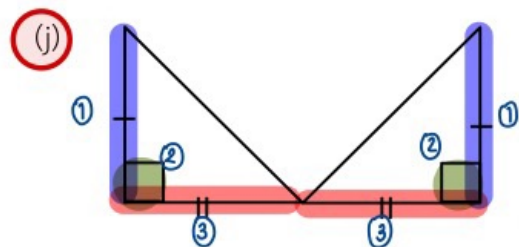
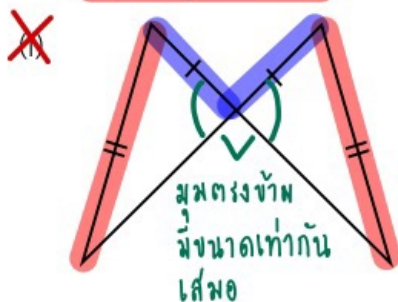
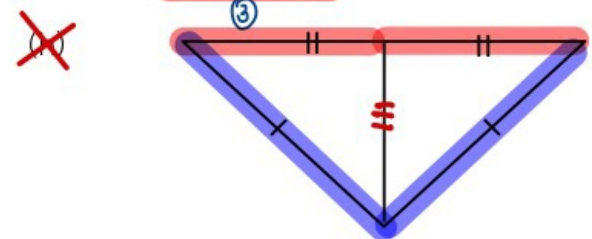
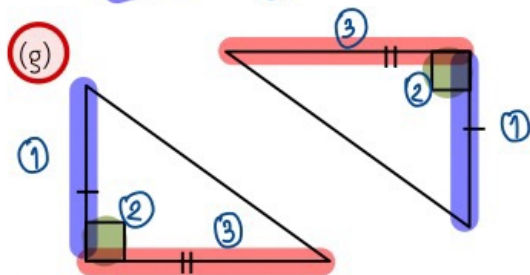
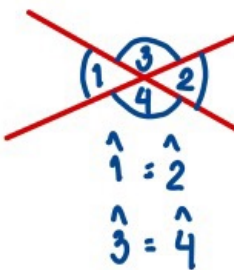
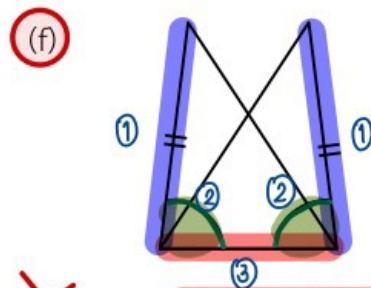
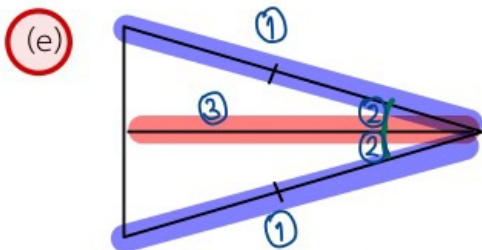
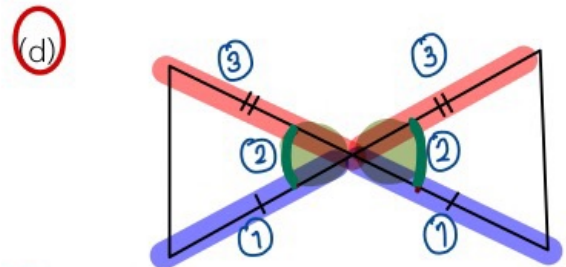
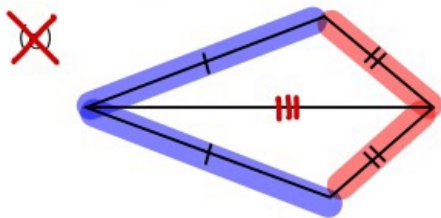
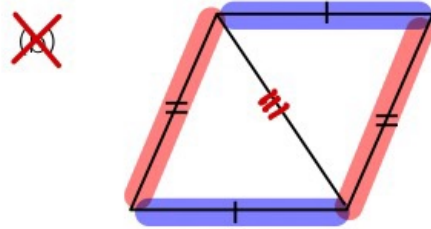
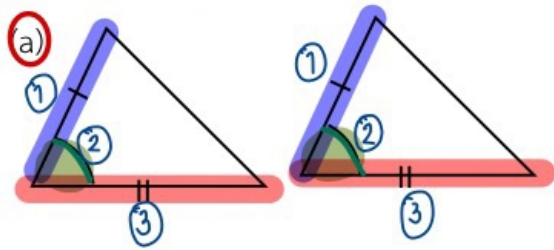
ความสัมพันธ์ของการเท่ากันทุกประการของสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยมใด ๆ สองรูปจะเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อ

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน - มุม - ด้าน

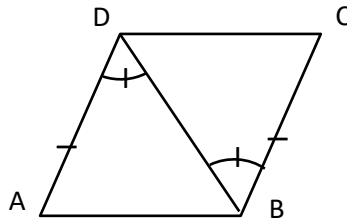
สามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่อยู่ระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน
 สามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากันทุกประการแบบ **ด้าน - มุม - ด้าน** → **ด.ม.ด**

1. จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงวงกลมล้อมข้อที่มีสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ
 ด้าน - มุม - ด้าน → **ด.ม.ด.**



มุมตรงข้าม
มีขนาดเท่ากัน
เสมอ

2. กำหนดให้ $AD = CB$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ จงพิสูจน์ว่าเพราะเหตุใด $\triangle ADB \cong \triangle CBD$



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

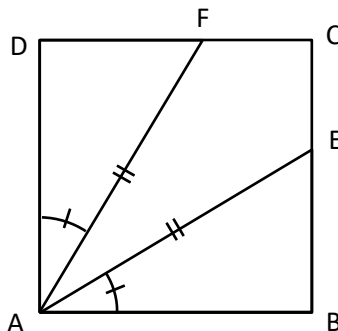
$$AD = CB \text{ และ } \widehat{D} = \widehat{B} \quad (\widehat{ADB} = \widehat{CBD})$$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

$$\triangle ADB \cong \triangle CBD \rightarrow \text{ด.พ.ด}$$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AD = CB$	โจทย์กำหนดให้
2. $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$	โจทย์กำหนดให้
3. $DB = BD$	สามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีด้านร่วม
4. $\triangle ADB \cong \triangle CBD$	จาก 1, 2, 3 $\triangle$ สองรูปเท่ากันทุกประการแบบ ด.พ.ด

3. สี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส กำหนดให้ $\widehat{DAF} = \widehat{BAE}$ และ $AF = AE$ จงพิสูจน์ว่า $DF = BE$



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

$$\square ABCD \text{ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส, } \widehat{DAF} = \widehat{BAE}, AF = AE$$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

$$DF = BE$$

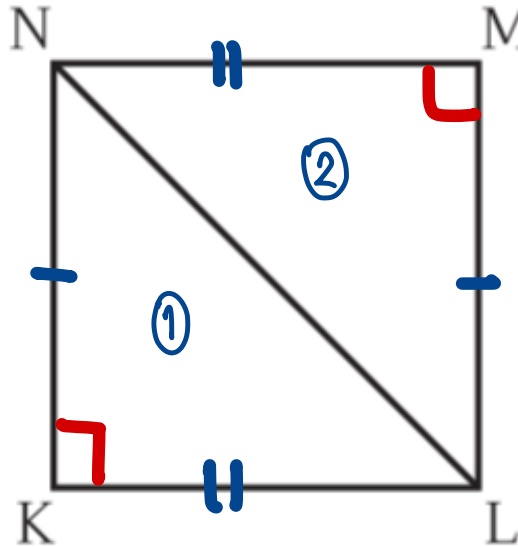
ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = AD$	เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านเท่ากันทุกด้าน
2. $\widehat{DAF} = \widehat{BAE}$	กำหนดให้
3. $AF = AE$	กำหนดให้
4. $\triangle DAF \cong \triangle EAB$	เท่ากันทุกประการแบบ ด.พ.ด.

$$5. DF = BE$$

ด้านคี่สมของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
จะมีความเท่ากัน.



2. $\square KLMN$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี $\overline{NL}$ เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า $\triangle NKL \cong \triangle LMN$



กำหนดให้

$\square KLMN$ เป็นรูปจัตุรัส และ $\overline{NL}$ เป็นเส้นทแยงมุม

ต้องการพิสูจน์ว่า

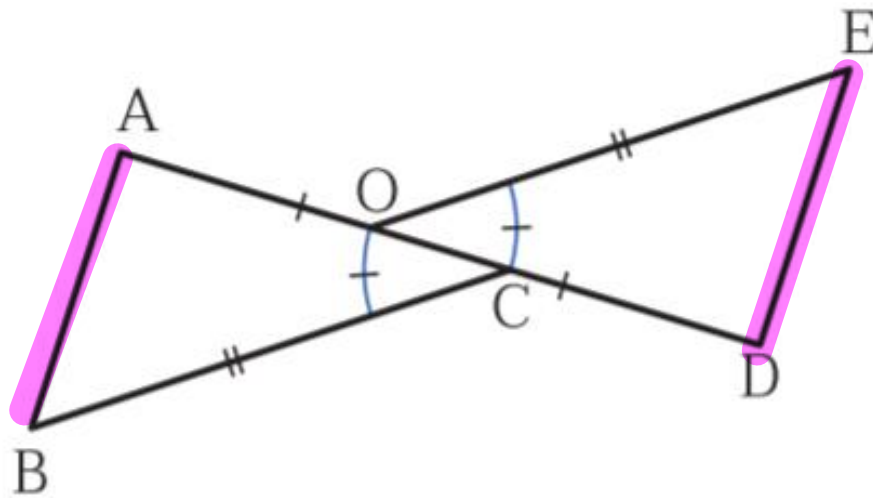
$\triangle NKL \cong \triangle LMN$

พิสูจน์

ด้าน
มุม
ด้าน
ด. ม. ด

	ข้อความ	เหตุผล
1.	$NK = ML$	$\square$ จัตุรัส มีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน
2.	$\hat{NKL} = \hat{MLN}$	$\square$ จัตุรัส ทุกมุมเป็นมุมฉาก = 90°
3.	$KL = MN$	$\square$ จัตุรัส มีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน
4.	$\triangle NKL \cong \triangle LMN$	ด้าน - มุม - ด้าน

3. จากรูป กำหนดให้ $AC = DO$, $BC = EO$ และ $\hat{ACB} = \hat{DOE}$ จงพิสูจน์ว่า $AB = DE$



กำหนดให้ $AC = DO$, $BC = EO$ และ $\hat{ACB} = \hat{DOE}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $AB = DE$

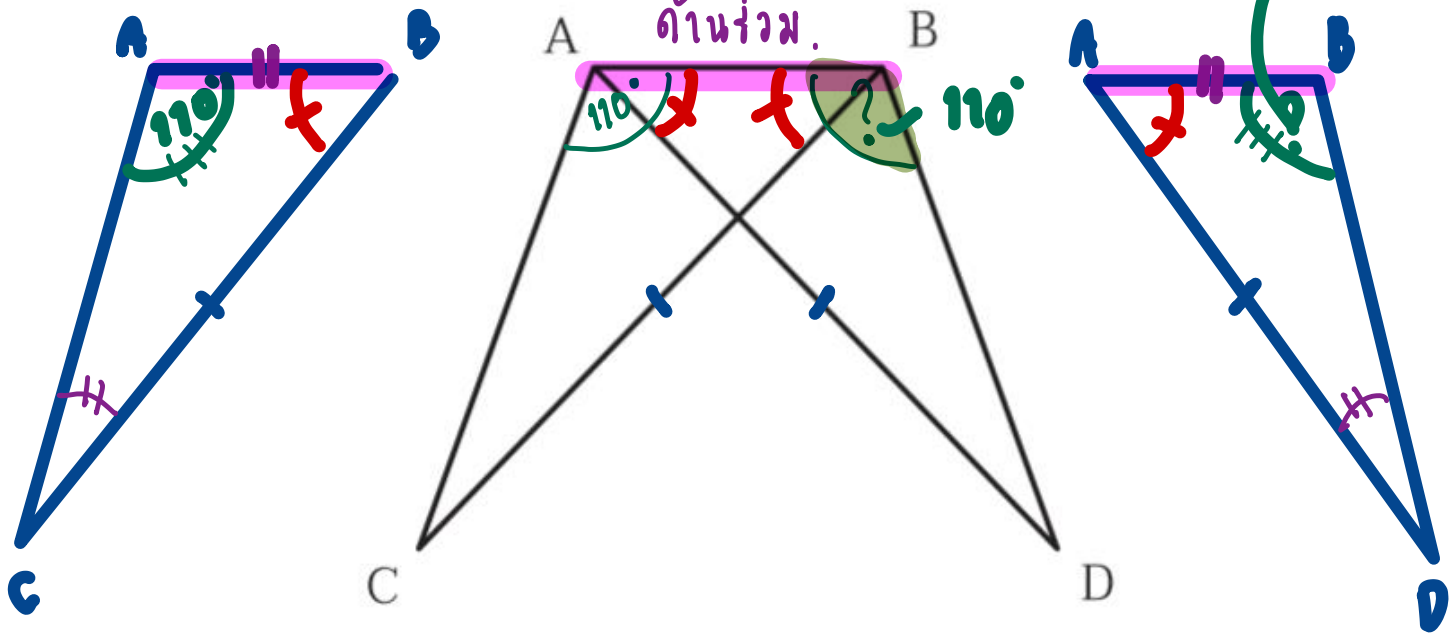
พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ACB$ และ $\triangle EOD$

	ข้อความ	เหตุผล
ด้าน	1. $AC = DO$	โจทย์กำหนดให้
มุม	2. $\hat{ACB} = \hat{DOE}$	โจทย์กำหนดให้
ด้าน	3. $BC = EO$	โจทย์กำหนดให้
ค.ม.๑	4. $\triangle ACB \cong \triangle EOD$	ด้าน - มุม - ด้าน.

$AB = DE$ ด้านคู่สมมุติของ $\triangle 2$ รูปที่เท่ากัน
ทุกประการ จะยาวเท่ากัน.

1) ด.น.ด. → $\cong$

5. จากรูป กำหนดให้ $BC = AD$ และ $\angle ABC = \angle BAD$ ถ้า $\angle BAC = 110^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle ABD$



กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

	ข้อความ	เหตุผล
1.		
2.		
3.		
4.		

.....

.....