ดีเทอร์มิแนนท์ : $\underbrace{\text{เมทริกซ์จัตุรัส}}$ → จำนวนจริง

1×1

2×2

3×3

$\vdots$

1×1 $A = [a]$ $\det A = |a| = a$

2×2 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

3×3 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$

$= aei + bfg + cdh$
$- gec - hfa - idb$

Ex32

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$$= (3)(1)(3) + (-2)(-1)(2) + \cancel{(2)(0)}(1)$$

$$- (2)(1)(2) - (1)(-1)(3) - (3)(\cancel{0})(-2)$$

$$= 9 + 4 + 0 - 4 + 3 - 0 = 12$$

2) $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det B = \left|\begin{array}{ccc} -1 & -2 & -3 \\ -5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -1 & -2 \\ -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$$= 6 + 0 + 15 - 18 - 0 - 20$$

$$= -17$$

Ex33 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1) $\det A = 6 - 4 = 2$

2) $\det B = 2 - (-2) = 4$

3) $\det(AB) = ?$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(AB) = 8 - 0 = 8$ เท่ากัน

4) $(\det A)(\det B) = (2)(4) = 8$

$$\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$$

5) $\det A^t = ?$

$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\det A^t = 6 - 4 = 2$

6) $\det B^t = ?$

$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\det B^t = 2 - (-2) = 4$

$A^t \neq A$ แต่ $\boxed{\det A^t = \det A}$

สแกนด้วย CamScanner

4) $\det A^{-1}$

A^{-1} เรียกว่า อินเวอร์สการคูณของ A

$A\square = I$ และ $\square A = I$

A^{-1}

หาอย่างไร ??

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}\,A$$

แต่เราจะใช้สมบัติ

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

หา A^{-1} ขนาด 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{6-4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \det A^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{2}$$

8) $\det B^{-1} = \frac{1}{\det B} = \frac{1}{4}$

$$\boxed{\det B^{-1} = \frac{1}{\det B}}$$

9) $\det A^2 = ?$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$$

$\det A^2 = 104 - 100 = 4$

เท่ากัน

10) $(\det A)^2 = (2)^2 = 4$

$$(\det A)^k = \det A^k$$

11) $\det(A+B) = ?$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det(A+B) = 15$ ← ไม่เท่ากัน

12) $\det A + \det B = 2 + 4 = 6$

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det B$$

13) $\det(A-B)$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A-B) = 1 - 4 = -3$

14) $\det A - \det B = 2 - 4 = -2$

$$\boxed{\det(A-B) \neq \det A - \det B}$$

15) $\det(2A) = ?$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$\det(2A) = 24 - 16 = 8$ ไม่เท่า

16) $2\det A = 2(2) = 4$

$$\det(kA) \neq k\det A$$

17) $\det(3A) = ?$

$$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$\det(3A) = 54 - 36 = 18$ ไม่เท่า

18) $3\det A = 3(2) = 6$

19) $\det(4A) = ?$

$$4A = 4\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$\det 4A = 96 - 64 = 32$ เท่ากัน

20) $4^2 \det A = 4^2(2) = 16 \times 2 = 32$

ถ้า A มีมิติ $n \times n$

$$\det(kA) = k^{n} \det A$$

EX 34

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) $\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{matrix}$

$= -2 + 0 + 0 - (-3) - 0 - 0$

$= 1$

2) $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8(1) = 8$

3) $2\det A = 2(1) = 2$

4) $\det 3A = 3^3 \det(A) = 27(1) = 27$

5) $27 \det A = 27(1) = 27$

สมบัติเกี่ยวกับ det

① $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

② $\det(A^{\square}) = (\det A)^{\square}$ $\quad \square \to t, -1, k$

$\det A^t = (\det A)^{\cancel{t}}$

$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

$\det A^k = (\det A)^k$

③ $\det(kA) = k^n \det A$

④ $\det(I) = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

⑤ นำ k คูณแถว (หลัก) ใดๆ

$$\det B = k \det A$$

เช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 4-6 = -2 \quad -2\times 5$

×5 ที่แถว 1

$B = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \det B = 20-30 = -10$

×3 ที่หลัก 2 $\quad -2\times 3 = -6$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ $\quad \det C = 12-18 = -6$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ $\quad \det D = 24-36 = -12$

$(-2)(2)(3) = -12$

⑥ สลับแถว (หลัก) คู่ใดๆ

$$\det B = -\det A$$

เช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = -2$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det B = 6-4 = 2$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \det C = 6-4 = 2$

⑦ มี 0 ทั้งแถว (หลัก) ใดๆ ทั้งแถว (หลัก)

$$\det A = 0$$

เช่น

$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 0$

⑧ ถ้ามี แถว (หลัก) คู่ใดๆ ที่เป็นสัดส่วนเท่ากัน ซึ่งกันและกัน

$\det A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \times 2 \qquad \det A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \quad \times 4 \qquad \det B = 12 - 12 = 0$$

⑨ $A = \begin{bmatrix} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{bmatrix}$

B = เกิดจาก ที่ k มาคูณ แถวใด (หลัก) ใด ของ A
แล้วมา บวก กับ แถว (หลัก) อื่น โดย
แถว (หลัก) เดิมนั้น ไม่เปลี่ยนแปลง

$\det B = \det A$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\times(-2)$ $\times 3$ $\quad \det A = -2$

$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det B = 28 - 30 = -2$

$C = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det C = -20 - (-18) = -2$

(10) A เป็นเมทริกซ์ Δ

- Δ บน
- Δ ล่าง
- Δ บนและ Δ ล่าง

det A = ผลคูณของเส้นทแยงมุมหลัก

เช่น $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\det A = 4(2)(-1) = -8$

$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ $\det B = -40$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ $\det C = -48$

สลับ

$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ det $= 48$