การหาดีเทอร์มิแนนท์โดยใช้ โคแฟกเตอร์ → $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

$M_{ij}(A)$: det ที่ตัดแถว i หลัก j ออก

Step ! ① เลือกแถว/หลัก มา 1 แถว/หลัก

(เทคนิคพยายามเลือกที่สมาชิกเป็น 0 มาก ๆ)

② det A = ผลบวกของ (สมาชิก × $C_{ij}(A)$) ทั้งแถว

Ex 40

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad -1 \quad 2} \end{bmatrix}$$

$$\det A = (1)C_{41}(A) + \cancel{(0)C_{42}(A)}^{\,0} + (-1)C_{43}(A) + (2)C_{44}(A)$$

$$= (1)(-1)M_{41}(A) + (-1)(-1)M_{43}(A) + 2M_{44}(A)$$

$$= -1\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \cancel{2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}}^{\,0} \times 1$$

$$= -1\left|\begin{matrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{matrix} + 1\left|\begin{matrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$$= -1\big(2 + (-40) + (-24) - (-24) - (-4) - 20\big)$$

$$+1\big(12 + (-4) + (-24) - 24 - (-24) - 2\big)$$

$$= (-1)(-54) + 1(-18) = 54 - 18 = 36$$

การบ้าน ทำแบบฝึกหัด ที่ 8

การแก้สมการและอสมการด้วยดีเทอร์มิแนนท์

Ex41 $A = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x^3 & 3x-1 \end{bmatrix}$ จงหาขอบเขตของ x ที่ทำให้ det A มีค่าไม่น้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์

$>$ ~~$\geq$~~ ~~$\neq$~~

$$\det A > 0$$
$$x^2(3x-1) - 2x^3(x) > 0$$
$$3x^3 - x^2 - 2x^4 > 0$$
$$x^2(3x - 1 - 2x^2) > 0$$
$$x^2(-2x^2 + 3x - 1) > 0$$

$$-x^2(2x^2 - 3x + 1) > 0$$
$$-x^2(2x-1)(x-1) > 0$$
$$x^2(2x-1)(x-1)\boxed{< 0}$$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$+ \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad - \quad 1 \quad +$

$\therefore x \notin (\frac{1}{2}, 1)$

Ex42 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4-3)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (8-(-2))(-2-(-6))$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10(4) = 40$$

Ex43 $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา $\det A$

$\cancel{\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$

$\cancel{A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$

$\det A^2 = \det \left(\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \right)$

$(\det A)^2 = 20 - (-5)$

$(\det A)^2 = 25$

$\therefore \det A = 5, -5$

Ex44 A, B, C เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2

$\det A^{-1} = \det 2I$, $\boxed{\det(B^t) = 8}$

$A^t B^2 C^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา $\det C$

$\det(B^t) = 8 \quad \therefore \det B = 8$

$\det(A^{-1}) = \det 2I \quad \therefore \frac{1}{\det A} = 2^2 \cancel{\det I}^{\,1}$

$\therefore \det A = \frac{1}{4}$

$A^t B^2 C^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(A^t B^2 C^{-1}) = \det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$(\det A^t)(\det B^2)(\det C^{-1}) = 32$

$\left(\frac{1}{4}\right)(8)^2 \frac{1}{\det C} = 32$

$\frac{1}{\cancel{4}_1} \times \cancel{8}^{\,1\,2} \times \cancel{8}^{\,1} \times \frac{1}{\cancel{32}\ \cancel{4}\ 2} = \det C$

$\det C = \frac{1}{2}$

Ex45 $A=\begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $C=2AB+B$

จงหา a ที่ทำให้ det C = 24

$\det B = 2-(-1) = 3$

$C = 2AB+B$

$C = (2A+I)B$

$\boxed{\det C} = \det (2A+I)B$

$24 = \det(2A+I)\boxed{\det B}_{=3}$

$\det(2A+I) = \frac{24}{3} = 8$

$10a+5-12 = 8$

$10a = 15$

$a = \frac{15}{10} = 1.5$

$2A+I$

$= 2\begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2a & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2a+1 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Ex46 $A=\begin{bmatrix} 2a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2a^2-(-1) = 2a^2+1$

$\det(3A^2) + (2a^2+1)^3 \det(A^{-1})^t = 40$

$9(\det A)^2 + \frac{(2a^2+1)^3}{\det A} = 40$

$9(2a^2+1)^2 + \frac{(2a^2+1)^3}{2a^2+1} = 40$

$10(2a^2+1)^2 = 40$

$(2a^2+1)^2 = 4$

$2a^2+1 = 2, -2$

$2a^2 = 1, -3$

$a^2 = 1/2, \cancel{-3/2}$

$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ทดลองทำแบบฝึกหัดที่ 9

สแกนด้วย CamScanner

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

$A(A^{-1}) = I_n \quad \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$(A^{-1})A = I$

A^{-1} ว่าเป็น อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A
ตัวผกผันการคูณ

① A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

② ตรวจสอบ เอกฐาน ของเมทริกซ์

A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) ก็ต่อเมื่อ $\det A = 0$

A ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

$p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p) \Leftrightarrow (\sim q)$

Ex 48 $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \det A = 12 - (-12) = 24 \neq 0$

$\therefore A$ ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

$B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \det B = 6 - 6 = 0$

$\therefore B$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

สแกนด้วย CamScanner

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\text{col}_1 \to \text{col}_3}_{\times -2}$$

$\det C = 0$ $\therefore$ C เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= 6 + (-2) + 0 - 3 - 0 - (+8)$$

$$= -7 \neq 0$$

$\therefore$ D ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

Ex#8

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & x \\ -3 & x & 2 \end{bmatrix}$$ หาค่า x ที่ทำให้

A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & x \\ -3 & x & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-2 & 2 \\ 0 & 4 \\ -3 & x \end{matrix} = 0$$

$$8x - 16 + (-6x) + 0 - (-12) - x^2(x-2) - 0 = 0$$

$$2x - 4 - x^3 + 2x^2 = 0$$

$$-x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^2(x-2) - 2(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2-2) = 0$$

$$x = 2, \pm\sqrt{2}$$