อินเวอร์สของเมทริกซ์

- เมทริกซ์เอกฐาน = $\boxed{\text{เมทริกซ์ที่ } \det = 0}$

  Singular Matrix

- เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)

$$\operatorname{adj} A = [C_{ij}(A)]^t$$

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$$

$M_{ij}(A)$ = det ที่ตัดแถวที่ i ออก
หลักที่ j

EX49 จงหา adj ของแต่ละข้อ

1) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$C_{11}(A) = (-1)^{1+1} M_{11}(A) = (-1)^2 |2| = 2$$

$$C_{12}(A) = (-1)^3 M_{12}(A) = (-1)(-4) = 4$$

$$C_{21}(A) = (-1)^3 M_{21}(A) = (-1)|3| = -3$$

$$C_{22}(A) = (-1)^4 M_{22}(A) = 6$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2) $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\text{adj } B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$C_{11}(B) = (-1)^{1+1} 2 = 2$

$C_{12}(B) = 1$

$C_{21}(B) = 6$

$C_{22}(B) = 3$

$\text{adj } B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

$C_{11}(C) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -42 - (-16) = -26$

$C_{12}(C) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -(12 - 12) = 0$

$C_{13}(C) = -13$

$C_{21}(C) = 38$

$C_{22}(C) = 0$

$C_{23}(C) = 19$

$C_{31}(C) = 34$

$C_{32}(C) = 0$

$C_{33}(C) = 7-(-10) = 17$

$$\operatorname{adj}(C) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -26 & 0 & -13 \\ 38 & 0 & 19 \\ 34 & 0 & 17 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -26 & 38 & 34 \\ 0 & 0 & 0 \\ -13 & 19 & 17 \end{bmatrix}$$

4) $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

สิทธิพงศ์ $C_{11}(D) = 2$

วุฒิกร $C_{12}(D) = -(-4-1) = 5$

ธีรชัย $C_{13}(D) = -1$

คมลด $C_{21}(D) = -(-4) = 4$

โสภานต $C_{22}(D) = 3$

อัญรินทร์ $C_{23}(D) = -(0-(-2)) = -2$

ธนด $C_{31}(D) = -5$

ชชิดา $C_{32}(D) = -9$

รวมผล $C_{33}(D) = -1$

$$\operatorname{adj} D = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -9 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -9 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ ($\underset{\sim}{A}^{-1}$)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

$\det A \neq 0$

A ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

EX 50 จงหา $\boxed{\text{อินเวอร์สการคูณ}}$ ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 24 \neq 0$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2) $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\det B = 0}$

$\therefore B^{-1}$ ไม่สามารถหาได้

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ $\det C = 0$

$\therefore$ C^{-1} ไม่สามารถหาได้

4) $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\det D = \boxed{-7}$

$\text{adj } D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -9 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore D^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -9 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Note!

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj } A$$

$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$