

วิธีเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และทฤษฎีบททวินาม

แฟกทอเรียล ค่าของ P และค่าของ C

บทนิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n ดังนี้

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$ อ่านว่า เอ็นแฟกทอเรียล

ข้อสังเกต $n! = n(n-1)!$ และ $0! = 1$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนผลคูณต่อไปนี้ในรูปแฟกทอเรียล

1) $15 \cdot 14$

2) $20 \cdot 19 \cdot 18$

3) $n(n-1)(n-2)$

4) $(n+1)n(n-1)$

5) $n(n^2-1)(n^2-4)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ

1) $4!5!$

2) $3!6!$

3) $(5-3)!$

4) $5! - 3!$

5) $\frac{5!}{3!}$

6) $\frac{6!}{8!}$

7) $\frac{43!}{42!}$

8) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

9) $\frac{9!}{(9-3)!3!}$

10) $\frac{9!-6 \cdot 7!}{10!}$

บทนิยาม กำหนด n และ r เป็นจำนวนเต็มบวกโดย $r \leq n$

1. ${}^n P_r = P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

2. ${}^n C_r = C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ

1) ${}^5 P_3$

2) ${}^7 P_2$

3) ${}^8 P_4$

4) ${}^{10} P_3$

5) ${}^{15} P_4$

2 | ความน่าจะเป็น

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ

- | | | |
|---|---------------------|---------------------|
| 1) ${}^{10}C_0$ | 2) 5C_0 | 3) ${}^{10}C_1$ |
| 4) 5C_1 | 5) ${}^{10}C_{10}$ | 6) 5C_5 |
| 7) ${}^{10}C_9$ | 8) 5C_4 | 9) 5C_2 |
| 10) 5C_3 | 11) 7C_4 | 12) 6C_2 |
| 13) $\binom{8}{6}$ | 14) $\binom{13}{5}$ | 15) $\binom{42}{3}$ |
| 16) ${}^3C_0 + {}^3C_1 + {}^3C_2 + {}^3C_3$ | | |
| 17) ${}^4C_0 + {}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4$ | | |

ข้อสังเกตเกี่ยวกับค่า P และค่าของ C

- | | |
|--|---|
| 1) ${}^nP_r = r! {}^nC_r$ | 2) ถ้า ${}^nC_x = {}^nC_y$ แล้ว $x + y = n$ |
| 3) ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_n = 2^n$ | 4) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ |

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า n ในแต่ละข้อต่อไปนี้

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------------------|
| 1) ${}^nP_2 = 90$ | 2) ${}^nC_3 = 56$ | 3) ${}^{n+1}P_3 = 20^{n-1}C_2$ |
|-------------------|-------------------|--------------------------------|

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า ${}^nP_r = 1680$, ${}^nC_r = 70$ จงหาค่า r และ n

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาค่าของ

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1.1) $4!0!$ | 1.2) $7!1!$ | 1.3) $4!3!$ |
| 1.4) $\frac{5!}{0!}$ | 1.5) $\frac{5!}{3!}$ | 1.6) $\frac{9!}{7!}$ |

3 | ความน่าจะเป็น

1.7) $\frac{15!}{13!2!}$

1.8) $\frac{18!}{15!3!}$

2. จงเขียนผลคูณในข้อต่อไปนี้เป็นรูปแฟกทอเรียล

2.1) $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$

2.2) $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26$

2.3) $50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55$

2.4) $10 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$

2.5) $(n+2)(n+1)(n)(n-1)$

2.6) $(2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)$

2.7) $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$

2.8) $4n(2n^2-3n+1)$

3. จงหาค่าของ

3.1) 4P_2

3.2) 6P_3

3.3) 8P_5

3.4) 5C_2

3.5) 7C_5

3.6) ${}^{28}C_4$

3.7) ${}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 + \dots + {}^{10}C_{10}$

3.8) ${}^{12}C_3 + {}^{12}C_4 + {}^{12}C_5 + \dots + {}^{12}C_{12}$

4. จงหาค่า n ของ

4.1) $n! = 24$

4.2) $n! = 720$

4.3) ${}^{n+1}P_2 = 72$

4.4) ${}^nC_3 = 4$

4.5) $6 \cdot {}^{n+1}P_3 = 7 \cdot {}^nP_3$

4.6) ${}^{n-1}P_5 - 3 \cdot {}^nP_4 = 0$

4.7) $\binom{30}{n+4} = \binom{30}{n-2}$

4.8) $\binom{36}{n-7} = \binom{36}{2n+1}$

5. ถ้า ${}^nP_r = 11880$, ${}^nC_r = 495$ จงหาค่า r และ n

กฎเกณฑ์การนับเบื้องต้น

กฎการนับ (กฎการคูณ)

ถ้าในการทำงานชิ้นหนึ่งสามารถแบ่งงานเป็น k ขั้นตอนโดย

ขั้นตอนที่ 1 สามารถทำงานได้ทั้งหมด n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 สามารถทำงานได้ทั้งหมด n_2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 สามารถทำงานได้ทั้งหมด n_3 วิธี

⋮

ขั้นตอนที่ k สามารถทำงานได้ทั้งหมด n_k วิธี

แล้ว จำนวนวิธีการทำงานชิ้นหนึ่งดังกล่าวทั้งหมด เท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ วิธี

กฎการนับ (กฎการบวก)

ถ้างานชิ้นหนึ่ง สามารถเลือกทำได้มากกว่า 1 ทาง (กรณี) ซึ่งแต่ละกรณีนั้นไม่สามารถทำงานพร้อมกันได้ จำนวนวิธีที่จะทำงานชิ้นนี้เสร็จสิ้นลงเท่ากับ ผลบวกของงานในแต่ละกรณี

ตัวอย่างที่ 7 นางสมศรีมีเสื้อสีแดงลายต่างกัน 2 ตัว สีนํ้าเงินลายต่างกัน 2 ตัว และสีขาว 1 ตัว มีกระโปรงสีแดง 1 ตัว สีนํ้าเงินลายต่างกัน 2 ตัว จงหาวิธีที่สมศรีจะสวมเสื้อและกระโปรงไปเที่ยวเป็นชุดต่างกันได้ทั้งหมดกี่ชุด ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไบนเพิ่มเติม
- 2) สมศรีต้องการใส่เสื้อสีแดง
- 3) สมศรีต้องการใส่กระโปรงสีนํ้าเงิน

ตัวอย่างที่ 8 ครูคนหนึ่งต้องการแจกขนม 3 ชั้น ที่แตกต่างกันให้กับนักเรียนซึ่งมีทั้งหมด 10 คน อยากทราบว่า จะมีวิธีการแจกขนมทั้ง 3 ชั้นให้กับนักเรียนทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) ไม่แจกขนมซ้ำคน

ตัวอย่างที่ 9 ในการสร้างเลข 3 หลัก เลขแต่ละหลักเลือกจากตัวเลข 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 จะได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อ

- 1) มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) เลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน
- 3) จำนวนที่สร้างมีค่าน้อยกว่า 500
- 4) เป็นจำนวนเลขคู่
- 5) เป็นจำนวนคี่และแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

5 | ความน่าจะเป็น

ตัวอย่างที่ 10 ในการสร้างเลข 3 หลัก โดยห้ามใช้ตัวเลขซ้ำจากเลข 0 - 9 จะสร้างเลขคู่สามหลักได้ทั้งหมดกี่จำนวน

ตัวอย่างที่ 11 ในการสร้างเลข 4 หลักจากเลข 0 - 9 และห้ามใช้ตัวเลขซ้ำจะสร้างเลขที่มากกว่า 5400 ได้กี่จำนวน

ตัวอย่างที่ 12 ในการสร้างเลข 4 หลักจากเลข 2, 4, 5, 6, 7, 8 จะสร้างเลขสี่หลักที่มีการใช้เลขซ้ำกันอย่างน้อย 2 หลักได้กี่จำนวน

ตัวอย่างที่ 13 สันตีกับธันวาคมแข่งเทเบิลเทนนิส ผู้ชนะคือผู้ที่ชนะติดกัน 2 เกมหรือชนะรวมกัน 3 เกม จงหาว่าทั้งคู่อาจแข่งขันกันทั้งหมดกี่วิธี

แบบฝึกหัดที่ 2

1. สนามกีฬาแห่งหนึ่งมีประตูเข้าออก 8 ประตู ถ้าคน ๆ หนึ่งจะเดินเข้าและออกจากสนามกีฬาแห่งนี้จะทำได้กี่วิธี ถ้า
 - 1.1) เข้าประตูใดและออกประตูใดก็ได้
 - 1.2) เข้าและออกสนามกีฬาโดยไม่ซ้ำประตูเดิม
 - 1.3) เข้าประตูใดต้องออกประตูนั้น
2. มีถนนจากกรุงเทพถึงสระบุรี 4 สาย มีถนนจากสระบุรีถึงนครราชสีมาอยู่ 3 สาย และมีถนนจากนครราชสีมาถึงขอนแก่น 2 สาย ถ้าต้องการเดินทางไปและกลับระหว่างกรุงเทพกับขอนแก่นโดยผ่านสระบุรีและนครราชสีมาจะมีวิธีเลือกเดินทางได้ทั้งหมดกี่วิธี

6 | ความน่าจะเป็น

- 2.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2.2) ขาไปและขากลับใช้เส้นทางไม่ซ้ำกัน
3. จงหาจำนวนวิธีที่จะให้รางวัลที่หนึ่ง ที่สองและที่สามให้เด็ก 5 คนโดย
 - 3.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 3.2) ไม่มีเด็กคนใดได้รับมากกว่า 1 รางวัล
4. มีโรงแรม 6 แห่ง อยากรหาว่านักท่องเที่ยว 4 คน จะเลือกพักโรงแรมดังกล่าวโดย
 - 4.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 4.2) นักท่องเที่ยวทำโรงแรมไม่ซ้ำกันเลย
 - 4.3) มีนักท่องเที่ยวอย่างน้อย 2 คน พักโรงแรมเดียวกัน
5. ครอบครัวหนึ่งย้ายมาจากต่างจังหวัด มีบุตร 4 คน ที่ต้องเข้าโรงเรียน ถ้ามีโรงเรียนที่นักเรียนทั้งสามจะเข้าได้ 5 โรงเรียน จะมีวิธีการเลือกเข้าโรงเรียนได้กี่วิธี ถ้า
 - 5.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 5.2) บุตรทั้ง 4 คนอยู่โรงเรียนที่ไม่ซ้ำกัน
 - 5.3) มีบุตรอย่างน้อย 2 คนอยู่โรงเรียนเดียวกัน
6. ในงานลีลาศแห่งหนึ่งมีชาย 4 คน หญิง 7 คน ชายทั้งสี่คนจะเลือกหญิงเป็นคู่เต้นรำในเพลงหนึ่งได้กี่วิธี
7. นก 6 ตัว จะเลือกเกาะต้นไม้ 3 ต้นได้กี่วิธี
8. ชายคนหนึ่งอยู่ ณ จุดกำเนิดของแกน x และเขาจะก้าวเดินทีละ 1 หน่วยไปทางซ้ายหรือทางขวา เขาจะหยุดเมื่อเดินแล้ว 5 ก้าว หรือถ้าเขาไปถึงระยะ 3 หรือ -2 หน่วย จงหาว่าชายคนนี้อาจเดินได้กี่เส้นทาง
9. นักวอลเลย์บอลทีมไทยกับทีมญี่ปุ่นแข่งขันกันผู้ชนะคือผู้ที่ชนะติดกัน 2 เกมหรือชนะรวม 4 เกม จงหาวิธีที่ทั้งสองทีมนี้อาจแข่งกัน
10. นายธนศเล่น ROULETTE เขามีเวลาเล่นอย่างมากที่สุดเพียง 5 ครั้ง ทุกครั้งที่เล่นถ้าแพ้เขาต้องเสียเงิน 1 บาท แต่ถ้าชนะเขาจะได้เงิน 1 บาท เขาลงทุน 1 บาท และตั้งใจว่าเขาจะหยุดเล่นหากเงินหมดหรือเขาได้กำไร 3 บาท จงหาว่าเขาอาจเล่นได้กี่วิธี

7 | ความน่าจะเป็น

การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

ถ้ามีของ n ที่แตกต่างกัน มาเรียงเป็นเส้นตรงจะได้จำนวนวิธีในการเรียงทั้งหมด _____ วิธี

ถ้ามีของ n ที่แตกต่างกัน มาเรียงเป็นเส้นตรง r สิ่ง โดยที่ $r \leq n$ จะได้จำนวนวิธีในการเรียงทั้งหมด _____ วิธี

ถ้ามีของ n ที่แตกต่างกัน โดยมีของที่เหมือนกันซึ่งจำแนกแต่ละกลุ่มได้ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ สิ่ง ตามลำดับ โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ จะได้จำนวนวิธีในการเรียงทั้งหมด _____ วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

ถ้ามีของ n ที่แตกต่างกัน มาเรียงเป็นวงกลม จะได้จำนวนวิธีในการเรียงทั้งหมด _____ วิธี

การจัดหมู่

ถ้ามีของ n ที่แตกต่างกัน มาจัดหมู่ จะได้จำนวนวิธีในการเรียงทั้งหมด _____ วิธี

หมายเหตุ การเรียงสับเปลี่ยนกับการจัดหมู่มีสิ่งที่แตกต่าง คือ _____

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดเลข 0 ถึง 9 มาให้ ซึ่งต้องการสร้างเลข 4 หลักโดยไม่ซ้ำกัน จะมีกี่วิธี เมื่อ

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) ห้ามด้วย 5 ลงตัว

ตัวอย่างที่ 15 จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 1000 ถึง 9999 ที่มีเลข 7 ปรากฏอย่างน้อยหนึ่งตำแหน่งอยู่ที่จำนวน

ตัวอย่างที่ 16 จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หารจำนวนที่กำหนดให้ได้ลงตัวมีกี่จำนวน

1) 360

2) 3825

3) 4914

ตัวอย่างที่ 17 ถ้าต้องการสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษร 4 ตัว ซึ่งไม่ซ้ำกัน โดยใช้ตัวอักษรจากคำว่า documents จะสร้างคำได้ทั้งหมดกี่คำ โดยคำที่สร้างไม่จำเป็นต้องมีความหมาย

1) ไม่มีเงื่อนไข

2) คำที่สร้างต้องขึ้นต้นด้วยพยัญชนะและลงท้ายด้วยสระ

3) ตัวอักษรในคำนั้นต้องมีสระอย่างน้อย 1 ตัว

ตัวอย่างที่ 18 ถ้าเลขทะเบียนรถยนต์ประกอบด้วย พยัญชนะไทย 2 ตัว และตามด้วยตัวเลขอีก 4 ตัวที่ไม่ใช่ 0 ทั้งหมด จะมีรถมาขอรับทะเบียนได้มากที่สุดกี่คัน

แบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดให้ใช้ตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 สร้างจำนวนที่มี 5 หลัก โดยแต่ละหลักไม่มีตัวเลขซ้ำกัน จงหาว่าจะสร้างได้กี่จำนวน เมื่อ

1.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

1.2) จำนวนนั้นมีค่ามากกว่า 350

1.3) จำนวนนั้นเป็นเลขคู่ทั้งหมด

1.4) จำนวนนั้น 10 ทหารลงตัว

2. จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 ถึง 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ มีจำนวนทั้งหมดกี่จำนวน

9 | ความน่าจะเป็น

3. จำนวนวิธีจัดเลข 3 หลักที่มีค่ามากกว่า 300 จากเลข 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 โดยตัวเลขเหล่านี้สามารถนำมาใช้ได้ครั้งเดียวได้กี่จำนวน
4. หมายเลขโทรศัพท์มือถือที่ขึ้นต้น 086 และลงท้ายด้วย 15 มีทั้งหมดกี่หมายเลข
5. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งต้องการออกบัตรสมนาคุณแก่ลูกค้าโดยมีหมายเลขตั้งแต่ 00001 ถึง 10000 และหมายเลขบัตรจะได้รับรางวัลต้องเป็นหมายเลขที่มีตัวเลขในตำแหน่งที่ 3 เป็น 5 และตัวเลขในตำแหน่งสุดท้ายเป็นเลขคี่ แล้วจำนวนบัตรที่ได้รับรางวัลจะมีกี่ใบ
6. ต้องการสร้างรหัสจากตัวอักษร A, B โดยกำหนดให้แต่ละรหัสอาจมีตัวอักษร 1 ตัว หรือ 2 ตัว หรือ 3 ตัว หรือ 4 ตัว เท่านั้น จะสร้างรหัสที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่ตัว
7. อักษรภาษาอังกฤษ 5 ตัว แตกต่างกัน ประกอบด้วยพยัญชนะ 2 ตัว และสระ 3 ตัว นำมาจัดเรียงใหม่โดยไม่ให้พยัญชนะอยู่ติดกัน แต่ละสระอยู่ติดกัน จำนวนวิธีการจัดเท่ากับเท่าใด
8. จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 2700 ลงตัวมีจำนวนเท่าใด
9. จำนวนเต็มทั้งหมดที่หาร 3150 ลงตัวมีจำนวนเท่าใด
10. นายสมพรมีเหรียญ 50 สตางค์ 4 เหรียญ เหรียญบาท 1 บาท 3 เหรียญ เหรียญ 5 บาท 4 เหรียญ และเหรียญ 10 บาท 5 เหรียญ จงหาวิธีที่นายสมพรจะแจกเหรียญให้เด็กคนหนึ่งโดย
 - 10.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 10.2) เด็กจะได้รับอย่างน้อย 1 เหรียญ

ตัวอย่างที่ 19 มีตำราคณิตศาสตร์ 6 เล่มที่แตกต่างกัน ฟิสิกส์ 5 เล่มที่แตกต่างกัน ภาษาไทย 2 เล่มที่แตกต่างกัน ต้องการจัดหนังสือไว้บนหิ้ง จะจัดได้กี่วิธีถ้า

- 1) วิชาเดียวกันอยู่ติดกัน
- 2) วิชาคณิตศาสตร์เท่านั้นที่ติดกัน
- 3) ภาษาไทยอยู่ติดกันและอยู่ริมสุด
- 4) วิชาคณิตศาสตร์ห้ามอยู่ติดกัน
- 5) วิชาภาษาไทยห้ามอยู่ติดกัน

ตัวอย่างที่ 20 ชาย 12 คน หญิง 12 คน ยืนเรียงแถวได้กี่วิธี ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไข
- 2) ชายกับหญิงยืนสลับกันคนต่อคน
- 3) ชายกับหญิงยืนสลับกันทุก 2 คน
- 4) ชายกับหญิงยืนสลับกันทุก 4 คน

ตัวอย่างที่ 21 จัดชาย 8 คน หญิง 8 คน ยืนเป็นแนวเส้นตรงได้กี่วิธีโดย

- 1) หญิงไม่ยืนติดกัน
- 2) ชายห้ามยืนติดกัน และหญิง 2 คนซึ่งเป็นฝาแฝดกันต้องยืนติดกันเสมอ

แบบฝึกหัดที่ 4

1. มีหนังสือคณิตศาสตร์ต่างกัน 3 เล่ม หนังสือวิทยาศาสตร์ต่างกัน 2 เล่ม หนังสือภาษาอังกฤษต่างกัน 3 เล่ม ถ้าต้องการจัดเรียงหนังสือทั้ง 8 เล่มนี้ โดยให้หนังสือวิชาชุดเดียวกันอยู่ติดกัน จะได้กี่วิธี
2. มีผ้าเช็ดหน้าสีขาวลายต่างกัน 3 ผืน สีฟ้าลายต่างกัน 2 ผืน สีชมพูลายต่างกัน 2 ผืน จำนวนวิธีเรียงผ้าเช็ดหน้า 7 ผืนซ้อนกัน โดยที่ผ้าเช็ดหน้าสีขาวอยู่ติดกันทั้งสามผืนไม่ได้ เท่ากับเท่าใด
3. ในการจัดให้พ่อแม่และลูกสาว 3 คน กับลูกชาย 2 คน นั่งเรียงแถวถ่ายรูป จำนวนวิธีที่จัดให้พ่อแม่นั่งกลาง ลูกสาวทั้งหมดอยู่ข้างหนึ่ง และลูกชายทั้งหนึ่งอยู่อีกข้างหนึ่งเท่ากับเท่าใด
4. จำนวนวิธีจัดผู้ชาย 3 คน และผู้หญิง 4 คน ให้นั่งในแถว โดยที่ผู้ชายจะนั่งในตำแหน่งเลขคู่เสมอ เท่ากับเท่าใด
5. รถยนต์คันหนึ่งมีที่นั่งด้านหน้า 2 ที่ และด้านหลัง 3 ที่ ต้องการจัดคนเข้านั่งรถ โดยให้คนขับรถเป็นเท่านั้นที่นั่งหน้า จำนวนวิธีที่จะจัดคน 5 คน (ในจำนวนนี้มี 3 คน ที่ขับรถเป็น) เข้านั่งรถได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 21 ในการสร้างเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $a = 0$ และ $b, c, d \in \{-5, -3, 0, 2, 3, 4\}$ จงหา

- 1) จำนวนเมทริกซ์ที่สร้างขึ้นได้ทั้งหมด
- 2) จำนวนเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
- 3) จำนวนเมทริกซ์เอกฐาน
- 4) จำนวนเมทริกซ์ที่มีค่าดีเทอร์มิแนนต์น้อยกว่าศูนย์

ตัวอย่างที่ 22 ถ้า $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ และ $B = \{-2, 0, 2, 4\}$ จงหา

- 1) จำนวนสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B
- 2) จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B
- 3) จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป B
- 4) จำนวนฟังก์ชัน $1-1$ จาก A ไป B
- 5) จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป B โดยที่ ทุก $x \in A$ ที่ $f(x) \leq x$ หรือ $f(x) = 4$

ตัวอย่างที่ 23 ถ้า $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{-2, 2\}$ จงหาจำนวนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

1. ถ้า $A = \{1,2,3,4\}$ แล้วจำนวนทั้งหมดของฟังก์ชัน $f: A \rightarrow A$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง มีทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน
2. ให้ $A = \{0,1,2, (1,2), (3,2)\}$ และ $B = (A \times A) - A$ จำนวนสมาชิก B เท่ากับเท่าใด
3. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ จำนวนของฟังก์ชัน $f: A \rightarrow A$ ซึ่งมีสมบัติที่ว่า ทุก $x \in A$ ที่ $f(x) > x$ หรือ $f(x) = 3$ เท่ากับเท่าใด
4. กำหนดให้ $A = \{1,2\}$ และ $B = \{1,2,3, \dots, 10\}$ ถ้า $N = \{f|f: A \rightarrow B, f \text{ เป็น } 1-1 \text{ และมี } x \in A \text{ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ } f(x) = x\}$ แล้ว N มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว
5. กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a, b\}$ ถ้า $S = \{r|r \subset A \times B\}$ และ $F = \{r \in S|r \text{ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีจำนวนสมาชิกในโดเมนเท่ากับ } 2\}$ แล้ว $n(F)$ เท่ากับเท่าใด
6. กำหนดให้ $S = \{x|x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } |x| \leq 5\}$ และ $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + a^2}{x^4 + bx + 4}$ โดยที่ $a \in S, b \in S$ จำนวนคู่อันดับ $(a, b) \in S \times S$ ทั้งหมดที่ทำให้ $f(1) = 0$ เท่ากับเท่าใด
7. ให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $\{f|f: A \rightarrow B, f \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน } 1-1\}$ เท่ากับเท่าใด
8. ถ้า $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ และ $B = \{1,2,3\}$ แล้วจำนวนฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ทั้งหมดซึ่ง $f(1) \neq 1$ หรือ $f(2) \neq 2$ หรือ $f(3) \neq 3$ เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 24 มีข้อสอบ 12 ข้อ ต้องการทำเพียง 8 ข้อ มีวิธีการทำได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) ผู้เข้าสอบทุกคนจะต้องทำข้อ 1
- 3) ผู้เข้าสอบต้องทำ 3 ข้อ จาก 6 ข้อแรก
- 4) ผู้เข้าสอบต้องทำอย่างน้อย 4 จาก 6 ข้อแรก

ตัวอย่างที่ 25 โรงงานผลิตหลอดไฟแห่งหนึ่งผลิตครั้งละ 20 หลอด พบว่าในจำนวน 20 หลอดมีหลอดไฟที่ดีอยู่ 15 หลอด ถ้าทำการสุ่มหยิบมาคราวละ 4 หลอด จะได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) หยิบได้หลอดดีทั้ง 4 หลอด
- 3) หยิบได้หลอดเสียทั้ง 4 หลอด
- 4) หยิบได้หลอดดีและหลอดเสียอย่างละ 2 หลอด
- 5) หยิบได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด
- 6) หยิบได้หลอดดีอย่างน้อย 1 หลอด

ตัวอย่างที่ 26 จงหาจำนวนวิธีการหยิบไฟครั้งละ 5 ใบ จากไฟสำหรับหนึ่งโดย

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) หยิบได้สีแดง 3 ใบ
- 3) หยิบได้โพดำ 3 ใบ
- 4) หยิบได้โพแดง 3 ใบ และดอกจิก 2 ใบ
- 5) หยิบได้สีเดียวกันทั้ง 5 ใบ
- 6) หยิบได้ดอกเดียวกันทั้ง 5 ใบ
- 7) หยิบได้สีแดงอย่างน้อย 1 ใบ
- 8) หยิบได้สีแดงและเป็นข้าวหลามตัดอย่างน้อย 1 ใบ
- 9) หยิบได้โพดำอย่างน้อย 3 ใบ

ตัวอย่างที่ 27 ในเทศกาลส่งบัตรอวยพรปีใหม่ครั้งหนึ่ง มีกลุ่มคนกลุ่มหนึ่งได้ตกลงว่าทุกคนต้องส่งบัตรอวยพรให้ทุก ๆ คน พบว่าได้ใช้บัตรอวยพรทั้งหมด 132 ใบ อย่างทราบว่าจำนวนคนในกลุ่มนี้มีเท่าใด

แบบฝึกหัดที่ 6

1. ในการสอบไล่ครั้งหนึ่ง อาจารย์ออกข้อสอบทั้งหมด 13 ข้อ ให้นักเรียนเลือกทำให้ครบ 10 ข้อ และใน 5 ข้อแรกมีข้อบังคับเลือก 3 ข้อ นักเรียนจะเลือกทำข้อสอบทั้งหมดกี่วิธี
2. ในการเลือกทำแบบฝึกหัด 8 ข้อจากทั้งหมด 10 ข้อ ถ้าต้องการเลือกทำข้อคู่ 4 ข้อ จำนวนวิธีเลือกทำแบบฝึกหัดเท่ากับเท่าใด
3. กล่องใบหนึ่งมีปากกาสีขาว 5 ด้าม และปากกาสีเหลือง 4 ด้าม ปนกันอยู่ หยิบปากกามาสองด้ามอย่างสุ่ม ๆ จำนวนวิธีที่จะได้ปากกาสองด้ามเป็นสีเดียวกันเท่ากับเท่าใด
4. ตู้ใบหนึ่งมีเสื้อสีแดงแบบต่าง ๆ กัน 6 ตัว และเสื้อสีขาวแบบต่าง ๆ กัน 4 ตัว ถ้าสุ่มหยิบเสื้อจากตู้ใบนี้มา 5 ตัว ให้มีสีคละกันแล้ว จำนวนวิธีที่จะหยิบได้เสื้อสีแดงมากกว่าเสื้อสีขาวเท่ากับเท่าใด
5. สมศรีมีเครื่องประดับที่เป็นทองและเพชร ที่แตกต่างกัน 6 ชิ้น ต้องการบริจาคเพื่อช่วยชาติ 3 ชิ้น จำนวนวิธีที่สมศรีจะบริจาคเครื่องประดับเท่าใด
6. โรงงานผลิตโทรทัศน์แห่งหนึ่ง สามารถผลิตได้ 20 เครื่องต่อวัน โดยมีเครื่องชำรุด 10% หยิบโทรทัศน์มา 3 เครื่องโดยการสุ่ม จำนวนวิธีที่จะไม่ได้โทรทัศน์ที่ชำรุดเลยเท่ากับเท่าใด
7. ในงานเลี้ยงสังสรรค์เพื่อนกลุ่มหนึ่ง ถ้าทุกคนที่มาในงานต่างทักทายแลกเปลี่ยนโดยการจับมือกัน ถ้านับดูแล้วรวมทั้งหมดมี 21 ครั้ง ถามว่ามีแขกที่มาร่วมงานทั้งหมดกี่คน
8. ในการแข่งขันฟุตบอลของทีมโรงเรียนต่าง ๆ จำนวน 50 ทีม ถ้าจัดการแข่งขันแบบพบกันหมด จำนวนครั้งของการแข่งขันทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 28 ในชมรมอนุรักษ์วัฒนธรรมไทย มีสมาชิกเป็นพ่อบ้าน 5 คน แม่บ้าน 3 คน และเยาวชน 5 คน ต้องการเลือกกรรมการชุดหนึ่งที่มี 3 คน โดย

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) พ่อบ้านและแม่บ้านและเยาวชนได้รับเลือกอย่างละ 1 คน
- 3) ได้พ่อบ้านอย่างน้อย 1 คน
- 4) ได้พ่อบ้าน 1 คน และเยาวชนอย่างน้อย 1 คน
- 5) ด.ช.ก และ ด.ญ.ข เป็นเยาวชนในจำนวน 5 คนนี้ จงหาจำนวนวิธีที่เลือกกรรมการโดย ด.ช.ก หรือ ด.ญ.ข เป็นกรรมการ
- 6) นายสมควรเป็นพ่อบ้านและนางสมใจเป็นแม่บ้านในชมรมนี้ ทั้งคู่มีเงื่อนไขว่าถ้าจะเป็นกรรมการก็เป็นทั้งคู่ หรือไม่ก็เป็นกรรมการทั้งคู่ จงหาจำนวนวิธีในการเลือกกรรมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

ตัวอย่างที่ 29 ในการเข้าค่ายเยาวชนแห่งหนึ่งมีเยาวชนทั้งหมด 9 คน ได้เข้าพักเรือนรับรองหลังหนึ่งซึ่งมีห้องพัก 4 คน 1 ห้อง ห้องพัก 2 คน 2 ห้อง และห้องพัก 1 คน 1 ห้อง จงหาวิธีการจัดเยาวชนทั้ง 9 คน เข้าพักในห้องต่าง ๆ โดย

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) ถ้าหนูงกับหญิง เป็นเยาวชนในกลุ่มนี้ จงหาจำนวนวิธีในการจัดเยาวชนเข้าที่พัสดังกล่าวโดยหนูงกับหญิงเข้าพักห้องเดียวกัน
- 3) ถ้าหนูงกับหญิง เป็นเยาวชนในกลุ่มนี้ จงหาจำนวนวิธีในการจัดเยาวชนเข้าที่พัสดังกล่าวโดยหนูงกับหญิงไม่ได้เข้าพักห้องเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 30 กำหนด $A = \{2,4\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ และ $D = \{-2,0,2,4,6\}$ จงหาจำนวนเซต X ทั้งหมด ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) $X \subset B$
- 2) $X \subset C$
- 3) $A \subset X \subset C$
- 4) $B \subset X \subset C$
- 5) $X \subset C$ ที่มี $2 \in X$ แต่ $6 \notin X$
- 6) $X \subset C$ และ $X \not\subset D$

ตัวอย่างที่ 31 มีจุด 10 จุด A, B, C, D, \dots อยู่บนระนาบ และไม่มี 3 จุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกับ จงหา

- 1) จำนวนเส้นตรงที่สร้างได้ทั้งหมด
- 2) ถ้าใช้จุด 10 จุดนี้เป็นจุดยอด สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ทั้งหมดกี่รูป
- 3) ถ้าใช้จุด 10 จุดนี้เป็นจุดยอด สามารถสร้างรูปห้าเหลี่ยมได้ทั้งหมดกี่รูป
- 4) ถ้าใช้จุด 10 จุดนี้เป็นจุดยอด สามารถสร้างรูปเหลี่ยมได้ทั้งหมดกี่รูป
- 5) ถ้าใช้จุด 10 จุดนี้เป็นจุดยอด สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มี A เป็นจุดยอดได้ทั้งหมดกี่รูป
- 6) ถ้าใช้จุด 10 จุดนี้เป็นจุดยอด สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มี A หรือ B เป็นจุดยอดได้ทั้งหมดกี่รูป

ตัวอย่างที่ 32 มีจุด 13 จุด อยู่ในระนาบโดยมี 6 จุดในจำนวนนี้อยู่ในแนวเดียวกัน จงหา

- 1) จำนวนเส้นตรงทั้งหมดที่สร้างขึ้นมาได้
- 2) ถ้าใช้ 13 จุดนี้เป็นจุดยอดสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ทั้งหมดกี่รูป
- 3) ถ้าใช้ 13 จุดนี้เป็นจุดยอดสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมได้ทั้งหมดกี่รูป

แบบฝึกหัดที่ 7

1. ในการเลือกคณะกรรมการ 5 คน จากผู้สมัคร 11 คน ถ้าผู้สมัครสองคนที่กำหนดให้จะไม่ถูกเลือกพร้อมกัน หรือไม่ถูกเลือกทั้งคู่ จำนวนวิธีการเลือกเท่ากับเท่าใด
2. จำนวนวิธีที่จะเลือกผู้แทน 3 คน จาก 9 คน ซึ่งประกอบด้วยชาย 4 คน หญิง 5 คน เข้าไปร่วมใน คณะกรรมการชุดหนึ่งโดยอย่างน้อยต้องมีชาย 1 คน มีกี่วิธี
3. ในการเลือกคน 7 คน ไปทำงานชิ้นหนึ่ง โดยใช้คนอย่างน้อย 1 คน แต่ไม่เกิน 3 คน จะมีวิธีการเลือกกี่วิธี
4. ในชมรมส่งเสริมศิลปกรรม มีสมาชิกเป็นพ่อบ้าน 4 คน แม่บ้าน 2 คน และเยาวชน 5 คน ต้องการเลือก กรรมการชุดหนึ่งที่มี 3 คน โดยจะต้องมีเยาวชนอย่างน้อย 1 คน จำนวนวิธีเลือกเท่ากับเท่าใด
5. ต้องการเลือกสมาชิก 4 คน จากสมาชิกทั้งหมด 12 คน เพื่อเป็นตัวแทนเข้าร่วมประชุม โดยที่สมาชิกทั้ง 12 คนนี้ มีสามีภรรยาคู่หนึ่ง ซึ่งถ้าคนใดคนหนึ่งได้เป็นตัวแทน อีกคนหนึ่งต้องได้ไปด้วย ดังนั้นจำนวนวิธีเลือกตัวแทน นี้เท่ากับเท่าใด
6. ครู 3 คน พานักเรียน 6 คน ไปเข้าค่ายวิชาการซึ่งต้องพักในบ้านหลังหนึ่งที่มีห้องนอน 3 ห้อง ห้องเล็กอยู่ได้ 2 คน ห้องกลางอยู่ได้ 3 คน และห้องใหญ่อยู่ได้ 4 คน ถ้าต้องการให้ครู 3 คน พักห้องเดียวกัน จะมีวิธีการ แบ่งคนเข้าพักได้ทั้งหมดกี่วิธี
7. ให้ $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $P(S) =$ เพาเวอร์เซตของ S ถ้า $X = \{A \in P(S) | 1 \in A \text{ และ } 7 \notin A\}$ และ $Y = \{A \in X | \text{ผลบวกของสมาชิกใน } A \text{ ไม่เกิน } 6\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ X และ Y (ตามลำดับ) เท่ากับเท่าใด

8. ถ้า $A = \{5,6,7,\dots,20\}$ และ $B = \{1,2,3,\dots,15\}$ แล้วจำนวนสมาชิกในเซต $\{x|x \text{ เป็นสับเซตของ } A \text{ และ } x \text{ ไม่เป็นสับเซตของ } B\}$ เท่ากับเท่าใด
9. มีจุดอยู่ 10 จุด คือ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J ไม่มี 3 จุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ถ้าโยงเส้นตรงกับจุดเหล่านี้ให้เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะได้รูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน AB ทั้งหมดกี่รูป
10. กำหนดจุด 6 จุด บนวงกลมหนึ่งบ จำนวนวิธีจะสร้างรูปเหลี่ยมบรรจุในวงกลมโดยใช้จุดเหล่านี้เป็นจุดยอดมุม เท่ากับเท่าใด
11. กำหนดรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า 1 รูป ถ้าลากเส้นตรงให้ผ่านจุดอย่างน้อย 2 จุด ในบรรดาจุดยอดและจุดกึ่งกลางด้านของรูปแปดเหลี่ยมที่กำหนดให้ จะสามารถนับเส้นตรงที่ตัดกันได้เท่ากับเท่าใด
12. ถ้าจุด A, B, C, D และ E อยู่บนเส้นรอบวงกลมวงหนึ่งแล้ว จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 33 ถ้าต้องการจัดชาย 4 คน หญิง 4 คน ซึ่งมีพี่น้อง 3 คน เป็นหญิงทั้งหมดอยู่ในกลุ่มนี้ด้วย จะนั่งล้อมเป็นวงกลมได้กี่วิธี ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไข
- 2) พี่น้อง 3 คน ต้องนั่งติดกันเสมอ
- 3) พี่น้อง 3 คน นั่งติดกัน และพี่คนโตต้องอยู่ตรงกลางระหว่างน้อง 2 คน เสมอ
- 4) พี่น้องที่ 3 คน ห้ามนั่งติดกัน
- 5) ให้น้องกลางและน้องเล็กในกลุ่มพี่น้อง 3 คน นั่งตรงข้ามกันเสมอ

ตัวอย่างที่ 34 ถ้าต้องการจัดชาย 12 คน หญิง 12 คน นั่งล้อมเป็นวงกลมได้กี่วิธี ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไข
- 2) จัดให้เกิดชาย 1 คน สลับกับหญิง 1 คน
- 3) จัดให้เกิดชาย 2 คน สลับกับหญิง 2 คน
- 4) จัดให้เกิดชาย 3 คน สลับกับหญิง 3 คน

ตัวอย่างที่ 35 คนกลุ่มหนึ่งมีชาย 10 คน หญิง 8 คน จะจัดให้ยืนรอบเป็นวงกลมครั้งละ 6 คน โดยที่เป็นชาย 4 คน หญิง 2 คน และหญิงห้ามติดกัน จะยืนได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 36 คนกลุ่มหนึ่งมีชาย 8 คน หญิง 10 คน จะจัดให้นั่งรอบเป็นวงกลมครั้งละ 8 คน โดยที่เป็นชาย 4 คน หญิง 4 คน และชาย 2 คนนั่งสลับหญิง 2 คน จะนั่งได้ทั้งหมดกี่วิธี

ตัวอย่างที่ 37 ต้องการร้อยพวงมาลัยเป็นวงกลมด้วยดอกไม้ 6 ชนิด คือ ดอกรัก จำปี จำปา กุหลาบ มะลิ ดาวเรือง จะร้อยพวงมาลัยได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) จำปีและจำปาห้ามอยู่ติดกัน
- 3) จำปีและจำปาอยู่ตรงข้ามกันเสมอ

แบบฝึกหัดที่ 8

1. ต้องการจัดคน 7 คน ให้นั่งรอบโต๊ะหกเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งจัดเก้าอี้โต๊ะรอบโต๊ะ 6 ตัว โดยเก้าอี้แต่ละตัววางห่างเป็นระยะเท่ากัน แล้วเก้าอี้หนึ่งตัวนั่งได้ 1 คน จะมีจำนวนวิธีจัดดังกล่าวได้กี่วิธี
2. ครอบครัวหนึ่งมีพ่อ แม่ และลูก 4 คน นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม 6 ที่นั่ง พ่อแม่และลูกคนโตจะต้องไม่นั่งติดกันเลย ได้กี่วิธี
3. คุณสมชายและภรรยาได้เชิญเพื่อนสนิทมารับประทานอาหารที่บ้าน 5 คน เวลาที่นั่งโต๊ะอาหารซึ่งเป็นโต๊ะกลม ไม่ต้องการให้คุณสมชายและภรรยานั่งติดกันที่จะได้คุยกับเพื่อนได้ทั่วถึง ดังนั้นเราจะจัดให้คนทั้ง 7 คน นั่งโต๊ะกลมได้ทั้งหมดกี่วิธี
4. คนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยพี่น้อง 2 คน และเด็กอื่นอีก 6 คน ต้องการจัดเด็กให้นั่งรอบโต๊ะกลมโดยที่ไม่ให้พี่น้องสองคนนั่งติดกัน จะจัดได้กี่วิธี

5. ถ้าต้องการจัดให้เด็กชาย 4 คน เด็กหญิง 3 คน นั่งเป็นวงกลม โดยไม่ให้เด็กหญิงนั่งติดกัน จะจัดได้กี่วิธี
6. จะจัดคน 6 คน นั่งโต๊ะกลม 2 ตัว ๆ ละ 3 คน ได้กี่วิธี
7. ในการนั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมซึ่งมี 10 ที่นั่ง ถ้าในบรรดา 10 คน ที่นั่งโต๊ะนี้ สามภรรยา 2 คู่ ต้องนั่งติดโดยแต่ละคู่ต้องนั่งเคียงข้างกันเสมอ แล้วจำนวนวิธีการจัดที่นั่งของคนทั้ง 10 คน เท่ากับเท่าใด
8. นักเรียนอนุบาลห้องหนึ่งมี 10 คน เป็นหญิง 5 คน ชาย 5 คน ครูประจำชั้นคิดจะจัดเกมให้เล่นร่วมกันโดยจัดให้เข้านั่งรอบโต๊ะกลมครั้งละ 6 คน และให้เด็กหญิงนั่งสลับกับเด็กชาย ครูจะมีวิธีการจัดให้เข้านั่งได้ต่างกันกี่วิธี
9. บ่อปลาแห่งหนึ่งเป็นวงกลม อนุญาตให้เข้าตกปลาได้ทีละ 4 คน โดยให้นั่งอยู่รอบบ่อ ถ้าครอบครัวหนึ่งมากัน 6 คน จะจัดคนในครอบครัวนี้ั่งรอบบ่อปลาได้ทั้งหมดกี่วิธี
10. ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง ตัวแทนนักเรียนจากชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ชั้นปีละ 3 คน จะต้องทำการประชุมเพื่อเตรียมการแสดงสำหรับงานคืนสู่เหย้าของโรงเรียน จำนวนวิธีที่จะจัดผู้เข้าร่วมประชุมทั้งหมดนั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่ตัวแทนที่มาจากชั้นปีเดียวกันต้องนั่งติดกัน เท่ากับเท่าใด
11. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดชาย 5 คน และหญิง 5 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลมโดยให้ชายหญิงนั่งสลับกันและ นาย ก. จะต้องนั่งติดกับนางสาว ข.
12. ในการประชุมครั้งหนึ่งมีผู้แทนจาก 3 ประเทศเข้าร่วมประชุม โดยมีตัวแทนประเทศละ 3 คน จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดให้ผู้แทนแต่ละประเทศต้องนั่งติดกันในการประชุมโต๊ะกลมเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 38 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดอันดับตัวอักษรทั้งหมดจากคำ MATHEMATICS

ตัวอย่างที่ 39 จะมีเลขกี่จำนวนที่มีค่าเกิน 1 ล้านโดยสร้างจากตัวเลข 2, 4, 0, 4, 5, 2, 4.

ตัวอย่างที่ 40 เด็กคนหนึ่งสามารถเดินก้าวไปข้างหน้าหรือถอยหลังได้ แต่ถูกอนุญาตให้เดินได้รวมกัน 12 ก้าว หากเด็กต้องการจะเดินไปถึงจุดที่ห่างจากเดิมไปข้างหน้า 6 ก้าว เด็กจะมีวิธีการเดินได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 41 ในการสร้างเลข 9 หลักจากเลข 1-9 โดยแต่ละหลักห้ามใช้เลขซ้ำกัน จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน

- 1) ไม่มีเงื่อนไข
- 2) โดยเลขคู่เรียงลำดับจากน้อยไปมาก
- 3) โดยเลขคี่เรียงลำดับจากมากไปยังน้อย
- 4) โดยเลข 5 ต้องอยู่ระหว่างเลข 1 กับเลข 9

ตัวอย่างที่ 42 ในการจัดคน 7 คน ซึ่งมี 4 คน เป็นคนครอบครัวเดียวกันเป็นวงกลม จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี โดยที่คนในครอบครัวนี้ต้องเรียงลำดับลูกสาว พ่อ แม่ และ ลูกชาย เป็นวงกลมด้วย

ตัวอย่างที่ 43 จากอักษรในคำว่า artificial satellite จะนำมา 6 ตัว เรียงในแนวหน้ากระดานได้กี่วิธี โดยที่

- 1) มีอักษรต่างกันทั้งหมด
- 2) มีอักษร 2 ชนิด ๆ ละ 3 ตัว
- 3) มีอักษร 3 ชนิด ๆ ละ 2 ตัว
- 4) มีอักษร 2 ชนิด ชนิดละ 4 ตัว กับ 2 ตัว
- 5) มีอักษรซ้ำกัน 4 ตัว และอีก 2 ตัวต่างกัน
- 6) มีอักษรซ้ำกัน 3 ตัว และอีก 3 ตัวต่างกัน
- 7) มีอักษร 2 ชนิด ๆ ละ 3 ตัว กับ 2 ตัว และอีก 1 ตัวที่ต่างกัน
- 8) มีอักษร 2 ชนิด ๆ ละ 2 ตัว และอีก 2 ตัวที่ต่างกัน

ตัวอย่างที่ 44 จะมีวิธีการเลือกตัวอักษร 4 ตัว จากอักษรทั้งหมดของคำว่า appearance

การจัดสิ่งของที่แตกต่างกันออกเป็นกลุ่ม

กรณี การแบ่งกลุ่มโดยมีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม

ทำการแบ่งสิ่งของ n สิ่งออกเป็นกลุ่มที่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม ๆ ละ n_1 สิ่ง n_2 สิ่ง ... n_k สิ่ง โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ สามารถทำงานได้ทั้งหมด $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}$ วิธี

กรณี การแบ่งกลุ่มโดยที่ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

ทำการแบ่งสิ่งของ n สิ่งออกเป็นกลุ่ม ๆ ที่ไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่มโดยแบ่งเป็น

m_1 กลุ่ม ๆ ละ n_1 สิ่ง

m_2 กลุ่ม ๆ ละ n_2 สิ่ง

⋮

m_k กลุ่ม ๆ ละ n_k สิ่ง

โดยที่ $m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 + \dots + m_kn_k = n$ สามารถทำงานได้ทั้งหมด $\frac{n!}{(n_1!)^{m_1} \cdot (n_2!)^{m_2} \cdot \dots \cdot (n_k!)^{m_k}}$

วิธี

ตัวอย่างที่ 45 ต้องการจัดคน 10 คน เป็นกลุ่ม ๆ เพื่อใส่เสื้อผ้าสีแดงที่เหมือนกัน 4 ตัว ชุดสีน้ำเงินที่เหมือนกัน 3 ตัว และชุดสีเหลืองที่เหมือนกัน 3 ตัว สามารถจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

ตัวอย่างที่ 46 ต้องการแบ่งส้ม 20 ผล ออกเป็นกอง โดย

1) มี 4 กอง ๆ ละ 5 ผล

2) มี 5 กอง ๆ ละ 4 ผล

3) มี 4 กอง ๆ ละ 3 ผล และ 2 กอง ๆ ละ 4 ผล

4) มี 2 กอง ๆ ละ 5 ผล และ 1 กอง ๆ ละ 10 ผล

ตัวอย่างที่ 47 ต้องการจัดคน 7 คน เพื่อไปงาน 3 งานที่แตกต่างกันโดยแต่ละงานจะใช้คนกี่คนก็ได้จะมีวิธีการจัดงานนี้ได้กี่วิธี

ตัวอย่างที่ 48 ต้องการแจกสิ่งของต่างกัน 5 ชิ้น ให้กับเด็ก 3 คน แต่ละคนได้รับอย่างน้อย 1 ชิ้น จะมีวิธีการแจกได้ทั้งหมดกี่วิธี

ทฤษฎีบททวินาม

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

ถ้าต้องการพจน์ที่ $r + 1$ หาได้จาก $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

ตัวอย่างที่ 49 จงกระจายในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

1) $(x + y)^5$

2) $(x - 2y)^4$

3) $(x^2 + \frac{1}{x})^5$

ตัวอย่างที่ 50 จงหา

- 1) พจน์ที่ 10 ของ $(a - 2b)^{14}$ 2) พจน์ที่ 9 ของ $(2x^2 + \frac{1}{x})^{12}$

ตัวอย่างที่ 51 ในการกระจาย $(2x - \frac{1}{x^2})^{14}$ จงหาพจน์ที่เท่าไรที่มี x^5 และมีสัมประสิทธิ์เท่าไร

ตัวอย่างที่ 52 จงหาว่ามีพจน์คงที่ในการกระจาย $(x^2 - \frac{2}{x})^{15}$ หรือไม่ ถ้ามีพจน์คงที่ดังกล่าวมีค่าเท่าใด

ตัวอย่างที่ 53 ในการกระจาย $(x + y)^n$ พบว่าสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่ 12 เท่ากับสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่ 17 จงหาพจน์ที่ 25

ตัวอย่างที่ 54 จงหาค่าของ

- 1) $(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5$ 2) $(1 + \sqrt{5})^5 - (1 - \sqrt{5})^5$

ตัวอย่างที่ 55 จงหาเศษที่เกิดจากการนำ 3^{333} หารด้วย

- 1) 4 2) 26

แบบฝึกหัดที่ 9

1. ในการกระจาย $(1+x)^{43}$ ถ้าสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $2r+1$ เท่ากับ สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $r+2$ แล้ว สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $3r$ เท่ากับเท่าใด
2. สัมประสิทธิ์ของ x^r ในการกระจาย $(x^2 + \frac{1}{x})^{2n}$ เท่ากับเท่าใด
3. จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $2 + 4^{101}$ ด้วย 5
4. จงกระจาย $(2a^2b - \frac{3}{ab^2})^4$

ความน่าจะเป็น

การทดลองสุ่มและแซมเปิลสเปซ

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองหรือการทำงานหนึ่ง ๆ ซึ่งทราบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองนั้นอาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถระบุได้อย่างถูกต้องว่าในแต่ละครั้งของการทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรจากบรรดาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แซมเปิลสเปซ คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 56 จงเขียนแซมเปิลสเปซและจำนวนของแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มต่อไปนี้

- 1) โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง
- 2) โยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง
- 3) โยนลูกเต๋า 1 ลูก
- 4) โยนเหรียญ 1 เหรียญและลูกเต๋า 1 ลูก
- 5) จัดเรียงคน 3 คน (นาย A, B และ C) ในแนวเส้นตรง

ตัวอย่างที่ 57 จงหาจำนวนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มต่อไปนี้

- 1) จัดเรียงชาย 4 คน หญิง 4 คน เป็นแนวเส้นตรง
- 2) จัดเรียงชาย 4 คน หญิง 4 คน เป็นวงกลม

เหตุการณ์

เหตุการณ์ คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการกระทำจริงของการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 58 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก จงเขียนเหตุการณ์และจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ดังต่อไปนี้

- 1) E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นเลขคู่
- 2) E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 4

ตัวอย่างที่ 59 ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก จงเขียนเหตุการณ์และจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ดังต่อไปนี้

- 1) E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มทั้งสองเหมือนกัน
- 2) E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลต่างของแต้มอย่างน้อย 4

ตัวอย่างที่ 60 ในการจัดเรียงชาย 4 คน และหญิง 4 คน ในแนวเส้นตรง จงหาจำนวนเหตุการณ์ต่อไปนี้

- 1) E_1 เป็นเหตุการณ์ที่จัดชาย 4 คน หญิง 4 คน แล้วได้ชาย 2 คน สลับกับหญิง 2 คน
- 2) E_2 เป็นเหตุการณ์ที่จัดแล้วชายห้ามอยู่ติดกัน

ตัวอย่างที่ 61 ในการหยิบไพ่ 2 ใบ จากไพ่สำหรับหนึ่ง จงหา

- 1) $n(S)$ ของการทำงานครั้งนี้
- 2) $n(E_1)$ โดย E_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่สีแดงทั้ง 2 ใบ
- 3) $n(E_2)$ โดย E_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำทั้ง 2 ใบ
- 4) $n(E_3)$ โดย E_3 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ข้าวหลามตัด 1 ใบ และโพแดง 1 ใบ

ตัวอย่างที่ 62 ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญและโยนลูกเต๋า 1 ลูก จงหา

- 1) แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้
- 2) E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เกิดหัวในการทดลองนี้
- 3) E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เกิดเลขคู่ในการทดลองนี้
- 4) เหตุการณ์ที่เกิดหัวและเลขคู่

- 5) เหตุการณ์ที่เกิดหัวหรือเลขคู่
- 6) เหตุการณ์ที่เกิดหัวแต่ไม่เกิดเลขคู่
- 7) เหตุการณ์ที่ไม่เกิดเลขคู่
- 8) เหตุการณ์ที่ไม่เกิดหัว
- 9) เหตุการณ์ที่ไม่เกิดหัวและไม่เกิดเลขคู่
- 10) เหตุการณ์ที่ไม่เกิดหัวหรือไม่เกิดเลขคู่

ตัวอย่างที่ 63 นักเรียนห้องหนึ่งมีทั้งหมด 50 คน ในจำนวนนี้มีนักเรียนชอบภาษาอังกฤษ 20 คน นักเรียนที่ชอบภาษาไทย 18 คน และนักเรียนที่ชอบทั้งภาษาอังกฤษและภาษาไทย 8 คน ถ้าทำการเลือกนักเรียนมา 1 คน จงหา

- 1) จำนวนแซมเปิลสเปซ
- 2) จำนวนเหตุการณ์ที่ 1 คนที่เลือกมาเป็นนักเรียนที่ชอบภาษาอังกฤษหรือภาษาไทย
- 3) จำนวนเหตุการณ์ที่ 1 คนที่เลือกมาเป็นคนชอบภาษาอังกฤษอย่างเดียว
- 4) จำนวนเหตุการณ์ที่ 1 คนที่เลือกมาไม่ชอบทั้ง 2 วิชา
- 5) จำนวนเหตุการณ์ที่ 1 คนที่เลือกมาเป็นนักเรียนที่ชอบเพียงวิชาเดียว

ตัวอย่างที่ 64 ในการจัดคน 10 คนเป็นวงกลม จงหา

- 1) จำนวนแซมเปิลสเปซ
- 2) ถ้านายธนศกับนายธวัฒน์เป็นคนใน 10 คนนี้ จงหาเหตุการณ์ที่จัดเป็นวงกลมแล้วนายธนศและนายธวัฒน์ไม่อยู่ติดกัน

ความน่าจะเป็น

ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซเป็นเซตจำกัด ที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยที่แต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน และ E เป็นเหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(E)$ ซึ่ง

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

สมบัติของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(E) = 0$ ก็ต่อเมื่อ เหตุการณ์นั้นไม่มีทางเกิดขึ้น
3. $P(E) = 1$ ก็ต่อเมื่อ เหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นอย่างแน่นอน
4. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
5. E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกับ E_2 ก็ต่อเมื่อ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
6. $P(E) = 1 - P(E')$

ตัวอย่างที่ 65 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองหนึ่ง ๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

- 1) $P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$
- 2) $P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$
- 3) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$

ตัวอย่างที่ 66 กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองหนึ่ง ๆ โดย $P(A) = 0.7, P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.3$ จงหา

- 1) $P(A \cup B)$
- 2) $P(A - B)$
- 3) $P(A' \cap B)$

ตัวอย่างที่ 67 นักเรียนห้องหนึ่งมีทั้งหมด 50 คน ในจำนวนนี้มีนักเรียนชอบภาษาอังกฤษ 20 คน นักเรียนที่ชอบภาษาไทย 18 คน และนักเรียนที่ชอบทั้งภาษาอังกฤษและภาษาไทย 8 คน ถ้าทำการเลือกนักเรียนมา 1 คน จงหา

- 1) ความน่าจะเป็นที่จะได้คนที่ชอบวิชาภาษาอังกฤษหรือภาษาไทย
- 2) ความน่าจะเป็นที่จะได้คนที่ชอบเพียงวิชาเดียว

ตัวอย่างที่ 68 จากการสำรวจเลือกชาวสวนกลุ่มหนึ่งพบว่าความน่าจะเป็นที่จะได้ชาวสวนทุเรียนเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่จะได้ชาวสวนเงาะเท่ากับ 0.4 ความน่าจะเป็นที่จะได้ชาวสวนเงาะหรือทุเรียนเพียงชนิดเดียวเท่ากับ 0.6 จงหา

- 1) ความน่าจะเป็นที่จะได้ชาวสวนเงาะและทุเรียน
- 2) ถ้าชาวสวนมีทั้งหมด 200 ครอบครัว จะมีชาวสวนที่ไม่ได้เป็นชาวสวนเงาะหรือชาวสวนทุเรียนกี่ครอบครัว

แบบฝึกหัดที่ 10

1. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ ซึ่ง $P(A \cap B) = P(A \cap B^c) = 0.1$ แล้ว $P(A \cup B)$ เท่ากับเท่าใด
2. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ถ้า $P(A \cap B^c) = 0.2$ และ $P(B^c) = 0.5$ แล้ว $P(A \cup B)$ เท่ากับเท่าใด
3. ให้ A, B และ C เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ S ซึ่ง $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$ ให้ $A \cup B \cup C = S$ ถ้า $P(A) = 0.24$ และ $P(B) = 0.36$ จงหา

$$3.1) P(C) \quad 3.2) P(A \cup B) \quad 3.3) P(B \cup C) \quad 3.4) P(A \cup C)$$

4. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ถ้า $P((A \cup B)') = 0.3$ และ $P(A \cap B') = P(A' \cap B) = 0.2$ แล้ว $P(A \cap B)$ เท่ากับเท่าใด
5. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ถ้า $P(A \cup B \cup C) = 0.9$ โดยที่ $P(A \cap B' \cap C') = P(B \cap A' \cap C') = P(C \cap A' \cap B') = 0.1$ และ $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = 0.2$ แล้ว $P(A \cap B \cap C)$ เท่ากับเท่าใด
6. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิลสเปซ S ถ้า $P(A' \cap B) = P(A \cap B') = P(A \cap B) = 0.2$ แล้ว $P((A \cup B)')$ เท่ากับเท่าใด
7. กำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ S ถ้า $2P(A) = 3P(A')$ แล้ว $P(A)$ เท่ากับเท่าใด
8. นักเรียนกลุ่มหนึ่งสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมี ผลปรากฏว่าจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ $\frac{1}{3}$ ของนักเรียนทั้งหมด จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านวิชาเคมีเท่ากับ $\frac{8}{15}$ ของนักเรียนทั้งหมด จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเพียงหนึ่งรายวิชาเท่ากับ $\frac{4}{5}$ ของนักเรียนทั้งหมด ถ้าเลือกนักเรียนคนหนึ่งโดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่สอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งรายวิชา
9. จากการสำรวจใบสมัครของผู้สมัครประกวดนางงามจักรวาล 100 คน พบว่าผู้สมัครที่พูดภาษาอังกฤษได้ 50 คน ภาษาฝรั่งเศสได้ 45 คน ภาษาสเปนได้ 30 คน ผู้สมัครที่พูดภาษาอังกฤษและฝรั่งเศสได้ 15 คน ภาษาอังกฤษและสเปนได้ 10 คน ฝรั่งเศสและสเปนได้ 10 คน และผู้สมัครที่พูดได้ทั้งสามภาษา 5 คน ถ้าสุ่มใบสมัครขึ้นมาหนึ่งใบ ความน่าจะเป็นที่จะได้ใบสมัครของผู้ที่พูดภาษาอังกฤษหรือฝรั่งเศสหรือสเปนได้ มีค่าเท่ากับเท่าใด
10. ในงานชุมนุมครั้งหนึ่งมีบุคคลอาชีพต่าง ๆ เข้าชุมนุม 300 คน ในจำนวนนี้มีอาชีพทนายความ 160 คน อาชีพขายประกัน 90 คน ทนายความและขายประกัน 40 คน ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มเลือกตัวแทน 1 คน ที่ไม่เป็นทนายความและไม่ขายประกัน เท่ากับเท่าใด
11. จากประวัติของผู้ป่วยของคลินิกแห่งหนึ่ง ที่ป่วยเป็นโรคหัวใจหรือโรคความดันโลหิตสูง ซึ่งมีจำนวน 50 คน โดยมีผู้ป่วยเป็นโรคหัวใจ 20 คน มีผู้ป่วยที่เป็นโรคหัวใจ และโรคความดันโลหิตสูง 15 คน ถ้าสุ่มหยิบประวัติผู้ป่วย 1 ราย แล้วความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะป่วยด้วยโรคหัวใจอย่างเดียว หรือป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูงอย่างเดียว เท่ากับเท่าใด

12. ถ้าความน่าจะเป็นที่แดงจะอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า เท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่ดำจะอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า เท่ากับ 0.9 และความน่าจะเป็นที่แดง หรือ ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า เท่ากับ 0.96 แล้วความน่าจะเป็นที่แดง และ ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับเท่าใด
13. หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีประชากรอยู่ 300 ครอบครัว มีครอบครัวที่ปลูกข้าว 170 ครอบครัว ปลูกอ้อย 180 ครอบครัว และปลูกทั้งข้าวและอ้อย 80 ครอบครัว จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวหนึ่งในหมู่บ้านนี้จะปลูกข้าวหรืออ้อย
14. กำหนดความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำเสียเท่ากับ 0.2 ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสียเท่ากับ 0.1 ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำหรือห้องครัวเสียเท่ากับ 0.25 แล้วความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสียพร้อมกัน เท่ากับเท่าใด
15. จากการสำรวจประชากรของหมู่บ้านแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าความน่าจะเป็นของครอบครัวที่ทำสวนลำไย เท่ากับ 0.5 ความน่าจะเป็นของครอบครัวที่ทำสวนลิ้นจี่ เท่ากับ 0.7 และความน่าจะเป็นของครอบครัวที่ทำสวนลำไยและลิ้นจี่ เท่ากับ 0.3 ถ้าหมู่บ้านแห่งนี้มีประชากรอยู่ 200 ครอบครัว จำนวนครอบครัวที่ทำสวนลำไยหรือสวนลิ้นจี่เท่ากับเท่าใด
16. อาคารหลังหนึ่งมีลิฟต์ 2 เครื่อง ความน่าจะเป็นที่ลิฟต์เครื่องแรกและเครื่องที่สองอยู่ที่ชั้นล่างเป็น 0.20 และ 0.30 ตามลำดับ ความน่าจะเป็นที่จะมีลิฟต์ทั้งสองเครื่องรอกอยู่พร้อมกันที่ชั้นล่างเป็น 0.06 ความน่าจะเป็นที่จะมีลิฟต์อยู่ชั้นล่างเพียงเครื่องเดียวเท่ากับเท่าใด
17. ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีเป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านทั้งสองวิชาเป็น $\frac{1}{4}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้เท่ากับเท่าใด

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ในการทำงานหนึ่ง ๆ หลังจากเกิดเหตุการณ์หนึ่ง บางครั้งเราต้องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่ง เราจะเรียกความน่าจะเป็นในลักษณะเช่นนี้ว่า **ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P(B|A)$ แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว

เหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน

A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ตัวอย่างที่ 69 กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่ $P(A) = 0.2, P(B) = 0.15$ และ

$$P(A \cup B) = 0.3 \text{ จงหา}$$

- 1) $P(A|B)$
- 2) $P(B|A)$

ตัวอย่างที่ 70 นาย ก และ ข สอบวิชาภาษาอังกฤษพบว่าความน่าจะเป็นที่นาย ก จะสอบผ่านเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ความน่าจะเป็นที่นาย ข จะสอบผ่านเท่ากับ $\frac{2}{3}$ และความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งคนเท่ากับ $\frac{5}{6}$ จงหา

- 1) ถ้าทราบว่านาย ข สอบผ่าน จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ก สอบผ่าน
- 2) ถ้าทราบว่า ก สอบตก จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ข สอบผ่าน

ตัวอย่างที่ 71 ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีขาว 3 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูกโดยหยิบทีละลูกและเมื่อหยิบแล้วไม่ต้องใส่คืนกล่องก่อนหยิบลูกต่อไป จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

- 1) ลูกบอลสีแดงทั้ง 3 ลูก
- 2) ลูกบอลสีขาว แดง ขาว ตามลำดับ
- 3) ลูกบอลสีแดง 2 ลูก ขาว 1 ลูก

ตัวอย่างที่ 72 ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 5 ลูก แดง 4 ลูก ถ้าให้นาย ก นาย ข และ นาย ค สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องทีละคน คนละลูกโดยให้นาย ก หยิบก่อนแล้วตามด้วย นาย ข และ ค ตามลำดับ และแต่ละคนมีสิทธิ์หยิบได้เพียงครั้งเดียว ถ้าใครหยิบได้สีแดงคนแรกก็จะได้รับรางวัล จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

- 1) นาย ก ได้รับรางวัล
- 2) นาย ข ได้รับรางวัล
- 3) นาย ค ได้รับรางวัล

ตัวอย่างที่ 73 กำหนดให้ $P(A) = 0.2, P(B) = P(C) = 0.1, P(A \cap B) = 0.02, P(A \cap C) = 0.15, P(B \cap C) = 0.08$ จงพิจารณาว่าเหตุการณ์แต่ละคู่ใดเป็นอิสระต่อกัน

ตัวอย่างที่ 74 นายธนศและนายธนดล เข้าแข่งขันยิงเป้าบิน พบว่าในการยิงแต่ละนัดความน่าจะเป็นที่นายธนศจะยิงถูกเป้าเท่ากับ $\frac{3}{5}$ ความน่าจะเป็นที่นายธนดลจะยิงถูกเป้าเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ถ้าทั้งสองยิงปืนคนละนัด จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

- 1) ยิงถูกเป้าทั้งสองคน
- 2) ยิงถูกเป้าอย่างน้อย 1 คน
- 3) ยิงไม่ถูกเป้าทั้งสองคน

ตัวอย่างที่ 75 อาจารย์คนหนึ่งให้ นาย ก นาย ข และ นาย ค ทำโจทย์คณิตศาสตร์ข้อเดียวกันพบว่า ความน่าจะเป็นที่นาย ก และนาย ข และนาย ค จะแก้โจทย์ได้ถูกต้องมีค่าเท่ากับ $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{7}$ ตามลำดับ

1) ถ้าให้ทั้ง 3 คน ทำโจทย์โดยแยกกันทำ จงหาความน่าจะเป็นที่

- (1) ทำโจทย์ถูกต้องทั้ง 3 คน
- (2) ทำโจทย์ถูกต้องเพียง 2 คน
- (3) ทำโจทย์ถูกต้องเพียงคนเดียว

2) ถ้าให้คนทั้ง 3 คน ทำโจทย์โดยปรึกษากันได้ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาทั้งสามจะแก้โจทย์ได้ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 76 ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลต่างของแต้มของลูกเต๋าทิ้งสองมีค่าอย่างน้อย 3

ตัวอย่างที่ 77 ในการโยนลูกเต๋า 3 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มของลูกเต๋าทิ้งสามเท่ากับ 12

แบบฝึกหัดที่ 11

1. มีเหรียญเที่ยงตรง 3 อัน ถ้าใช้สีเขียนเลข 1 ที่หน้าหัว และเขียนเลข 2 ที่หน้าก้อย เมื่อจะโยนเหรียญทั้งสามอันนี้พร้อมกันหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมของเลขที่หงายขึ้นมีค่าไม่เกิน 5 มีค่าเท่าใด

2. ทอดลูกเต๋าเพียงตรง 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลต่างของแต้ม มีค่าอย่างน้อย 4 เท่ากับเท่าใด
3. โยนเหรียญ 4 อัน พร้อม ๆ กันหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวสองอัน และก้อยสองอันเท่าใด
4. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าของลูกเต๋าทิ้งสองลูกจะเป็นเลขที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว มีค่าเท่าใด
5. โยนเหรียญ 1 อัน พร้อมกับลูกเต๋า 2 ลูก ถ้าเหรียญขึ้นหัวจะได้เงินเท่ากับผลบวกของลูกแต้มของลูกเต๋าทิ้งสอง ถ้าเหรียญขึ้นก้อยจะได้เงินเท่ากับผลต่างของแต้ม ความน่าจะเป็นที่จะได้เงินอย่างมาก 4 บาท มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 78 ในการขายบัตรเพื่อชิงรางวัลเครื่องคอมพิวเตอร์ชุดหนึ่ง บัตรที่ขายแต่ละใบมีหมายเลขประจำบัตรเป็นเลขห้าหลักต่าง ๆ กัน โดยแต่ละหลักเป็นเลขใดเลขหนึ่งใน $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ หมายเลขรางวัลได้จากการหมุนวงล้อห้าวงซึ่งวางเรียงกัน ถ้าการหมุนแต่ละวงล้อจะขึ้นเลข 0, 1, 2, 3, 4 หรือ 5 เลขใดเลขหนึ่งด้วยโอกาสเท่า ๆ กัน แล้วความน่าจะเป็นที่หมายเลขรางวัลจะเป็นหมายเลขที่มีเลขต่าง ๆ ซ้ำกันอย่างน้อยสองหลัก มีค่าเท่าใด

ตัวอย่างที่ 79 ชาย 3 คน หญิง 3 คน เข้าแถวเดียวกันเพื่อซื้อตั๋วภาพยนตร์ ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 3 คนจะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถวมีค่าเท่าใด

ตัวอย่างที่ 80 ถ้าใช้กระถางต้นเฟื่องฟ้า 3 กระถาง และกระถางต้นกุหลาบ 4 กระถาง แต่งเวทีซึ่งเป็นวงกลม โดยต้องใช้กระถางต้นไม้ 1 กระถาง วางบนกลางเวที และวางกระถางต้นไม้ที่เหลือรอบเวที ความน่าจะเป็นที่จะได้ต้นกุหลาบอยู่บนกลางเวที และต้นไม้ที่เหลือวางสลับชนิดกันรอบเวทีเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 81 กำหนดให้ $A = \{2,4,6,8\}$ และ $B = \{1,3,5,7,9\}$ ถ้าต้องการสร้างฟังก์ชันจาก A ไป B แล้ว จงหา

- 1) ความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
- 2) ความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชันที่ $f(x) \leq x$

ตัวอย่างที่ 82 ในการสร้างเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ โดยที่ $a, b, c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $d = 0$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์นอนซิงกูลาร์เป็นเท่าใด

ตัวอย่างที่ 83 สูดามีเสื้อ 10 ตัว เป็นสีแดง 2 ตัว สีน้ำเงิน 3 ตัว สีเขียว 1 ตัว และมีกระโปรง 6 ตัว เป็นสีแดง 2 ตัว สีน้ำเงิน 3 ตัว และสีเขียว 1 ตัว สมมติว่าสุดาแต่งตัวออกจากบ้านอย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่สุดาจะแต่งตัวโดยสวมเสื้อและกระโปรงมีสีต่างกันเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 84 บ้านพักและสถานที่ทำงานของดำรงตั้งอยู่ริมฝั่งแม่น้ำเจ้าพระยา ดำรงโดยสารเรือยนต์ไปทำงานตอนเช้าและกลับที่พักตอนเย็น ถ้าเรือยนต์มีสามขนาดคือ ขนาดใหญ่ 3 ลำ ขนาดกลาง 5 ลำ และขนาดเล็ก 2 ลำ ถ้าการวิ่งเรือยนต์โดยสารเป็นไปตามลำดับคิวและดำรงไม่เจาะจงโดยสารเรือลำหนึ่งลำใดโดยเฉพาะ ความน่าจะเป็นที่ดำรงจะโดยสารเรือยนต์ไปทำงานและกลับบ้านพักด้วยเรือคนละขนาด มีค่าเท่าใด

แบบฝึกหัดที่ 12

- ในการจัดงานของบริษัทแห่งหนึ่ง ได้แจกบัตรแก่ผู้เข้าชมงาน 100 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 00 ถึง 99 กำกับอยู่ สุ่มหยิบต้นขั้วของบัตรมา 1 ใบ เพื่อมอบรางวัลแก่ผู้เข้าร่วมงาน ผู้ที่มีบัตรซึ่งมีหมายเลขตรงกับต้นขั้วที่หยิบมาได้จะได้รางวัลที่ 1 ส่วนผู้ที่มีหมายเลขซึ่งมีหลักหน่วยตรงกับต้นขั้วหรือหลักสิบตรงกับต้นขั้วเพียงหลักเดียวจะได้รางวัลที่ 2 ถ้าสมชายได้รับแจกบัตรมา 1 ใบ ความน่าจะเป็นที่สมชายจะได้รับรางวัลเท่ากับเท่าใด
- จัดเด็กหญิง 3 คน และเด็กชาย 3 คน ให้ยืนเรียงแถวตรง จงหาความน่าจะเป็นที่
 - เด็กชายจะเป็นหัวแถวและท้ายแถว
 - เด็กเพศเดียวกันจะยืนติดกัน
- ชาย 3 คน และหญิง 4 คน เข้าแถวเดียวกันเพื่อซื้อรถไฟขบวนหนึ่ง ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 4 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถวเท่ากับเท่าใด
- เพื่อจะทดสอบความสามารถในการมองเห็น ผู้ทดสอบจะให้ผู้ถูกทดสอบมองวัตถุ 4 ชิ้น ซึ่งมีความเข้มแสงต่างกัน 4 ระดับ โดยหยิบให้ดูทีละชิ้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ถูกทดสอบจะได้ดูวัตถุทั้ง 4 ชิ้น โดยเรียงลำดับความเข้มของแสงเท่ากับเท่าใด
- สามี-ภรรยา 5 คู่ นั่งเก้าอี้รอบโต๊ะกลม ความน่าจะเป็นที่สามีคนหนึ่งจะนั่งติดกับภรรยาของเขาเท่ากับเท่าใด
- กำหนดให้เซต A มีสมาชิก 4 ตัว และเซต B มีสมาชิก 5 ตัว ถ้าสร้างฟังก์ชันจาก A ไป B ความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเท่ากับเท่าใด
- ในการสร้างเมทริกซ์ในรูปแบบ $\begin{bmatrix} x^2 - 1 & y \\ 0 & 2 + x \end{bmatrix}$ แบบสุ่มโดย x และ y เป็นสมาชิกของเซต $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์เอกฐานเท่ากับเท่าใด
- บ้านพักและโรงเรียนของสมศักดิ์อยู่ริมน้ำ เขาเดินทางไปโรงเรียนและกลับบ้านโดยทางเรือ ถ้ากำหนดว่าเรือที่สมศักดิ์จะใช้บริการได้ มีเรือด่วน 10 ลำ เรือหางยาว 8 ลำ ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์จะเดินทางไปโรงเรียนและกลับบ้านด้วยเรือด่วนลำเดียวกัน เท่ากับเท่าใด
- ในการเลือกประธาน รองประธาน และเลขานุการอย่างละ 1 คน จากผู้สมัคร 10 คน ซึ่งเป็นชาย 6 คน และหญิง 4 คน ความน่าจะเป็นที่จะได้ประธานเป็นชาย และเลขานุการเป็นหญิงเท่ากับเท่าใด
- เลขานุการผู้หญิงพิมพ์จดหมาย 4 ฉบับ ถึงคน 4 คน พร้อมจำหน่ายซอง ถ้าเขานำจดหมายใส่ซองอย่างสุ่มโดยไม่สนใจว่าใส่จดหมายในซองที่ถูกต้องหรือไม่ ความน่าจะเป็นที่จะมีจดหมาย 2 ฉบับ ใส่ซองที่ถูกต้องเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 85 ในกล่องบรรจุส้ม 6 ผล มีส้มดี 4 ผล และส้มเสีย 2 ผล สุ่มหยิบส้มขึ้นมา 3 ผล ความน่าจะเป็นที่จะได้ส้มดี 2 ผล และส้มเสีย 1 ผล เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 86 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีดำ 4 ลูก สีแดง 6 ลูก สีเขียว 6 ลูก ถาหยิบลูกบอลขึ้นมา 2 ลูกอย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีต่างกัน

ตัวอย่างที่ 87 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีแดง 5 ลูก (โดยที่ลูกบอลทั้ง 9 ลูกมีขนาดและลักษณะเหมือนกัน) สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องใบนี้ 3 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาวอย่างมาก 1 ลูก

ตัวอย่างที่ 88 ในการสุ่มหยิบลูกกวาดจากกล่องใบหนึ่งซึ่งมีลูกกวาดอยู่ 4 ชนิด ชนิดละ 2 เม็ด ให้เด็กชายสองคนคนละ 4 เม็ด ความน่าจะเป็นที่เด็กแต่ละคนได้ลูกกวาดครบทั้ง 4 ชนิดเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 89 ในกล่องใบหนึ่งมีบัตร 10 ใบ เขียนเลขที่เป็นจำนวนบวก 6 ใบ และจำนวนลบ 4 ใบ ถ้าหยิบบัตรขึ้นมาอย่างสุ่ม 3 ใบ และนำเลขบนบัตรมาแทนค่า A, B, C ในสมการ $D = \frac{A \times B}{C}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ D เป็นจำนวนบวกเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 90 สลาก 20 ใบ มีหมายเลขกำกับตั้งแต่ 1 ถึง 20 สลากหมายเลข 1, 2, 3 และ 4 มีรางวัล 1000, 500, 300 และ 200 บาท ตามลำดับ ชายผู้หนึ่งหยิบสลาก 2 ใบ แบบสุ่มจากสลากทั้งหมด ความน่าจะเป็นที่เขาจะได้รางวัลรวมกัน 500 บาท เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 91 เลือกจำนวนเต็มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัวมาหนึ่งจำนวนให้มีค่าอยู่ระหว่าง 10 ถึง 200 ความน่าจะเป็นที่จำนวนที่เลือกมานี้จะหารด้วย 7 ลงตัว เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 92 ในการเลือกกรรมการชุดหนึ่งจกชาย 6 คน หญิง 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกกรรมการ 3 คน ให้มีทั้งหญิงและชาย

ตัวอย่างที่ 93 คนกลุ่มหนึ่งเป็นชาย 6 คน และหญิง 4 คน ในกลุ่มนี้มีผู้ถนัดซ้าย 7 คน ซึ่งเป็นชาย 5 คน ถ้าสุ่มเลือกคนมา 3 คน จากกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่ได้ชายที่ถนัดซ้ายมากกว่าหญิงที่ถนัดซ้ายเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 94 เด็กคนหนึ่งบอกเพื่อนว่าตัวของเขาเกิดในเดือนเมษายน จงหาความน่าจะเป็นที่เพื่อจะทยอยวันเกิดของเขาได้ถูกต้อง ถ้า

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) บอกเพื่อนต่อว่าวันเกิดของเขาหารด้วย 3 หรือ 7 ลงตัว

ตัวอย่างที่ 95 ในการลากเส้นเชื่อมจุดยอด 3 จุด ใด ๆ ของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลม โดยที่เส้นนั้น ๆ ไม่ใช่ด้านของรูปสี่เหลี่ยมดังกล่าว ความน่าจะเป็นที่เส้นเชื่อมนั้นไม่ใช่เส้นรอบรูป และไม่ผ่านเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับเท่าใด

แบบฝึกหัดที่ 13

1. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีดำ 4 ลูก สีแดง 6 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลขึ้นมา 2 ลูกอย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีต่างกันเท่ากับเท่าใด
2. ตะกร้าใบหนึ่งมีส้ม น้อยหน้า และมะม่วง รวม 10 ลูก โดยที่จำนวนส้มเป็นสองเท่าของน้อยหน้าและมีมะม่วงอยู่ 1 ลูก ถ้าหยิบผลไม้ขึ้นมา 3 ลูก อย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่ได้ผลไม้ชนิดละ 1 ลูก มีค่าเท่ากับเท่าใด
3. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 15 ลูก เป็นสีแดง 1 ลูก สีขาว 2 ลูก นอกนั้นเป็นสีอื่น ถ้าเลือกลูกบอล 3 ลูก จากกล่องใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้สีแดง 1 ลูก และไม่ได้สีขาว เท่ากับเท่าใด
4. กล่องใบหนึ่งมีลูกอมชนิดหนึ่ง 10 เม็ด โดยเป็นลูกอมรสส้ม 3 เม็ด ถ้าสุ่มหยิบลูกอมมา 2 เม็ด ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกอมรสส้มอย่างน้อย 1 เม็ด เท่ากับเท่าใด
5. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเดียวกัน 8 ลูก เป็นสีขาว 3 ลูก และสีดำ 5 ลูก ถ้าสุ่มลูกบอลมาจากกล่องนี้ 3 ลูก และให้ P เป็นความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอล สีดำทั้ง 3 ลูก จงหาค่า 7P
6. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลอยู่ 13 สี สีละ 4 ลูก โดยที่ลูกบอลในแต่ละสี มีหมายเลข 1, 2, 3, 4 ตามลำดับ สุ่มหยิบลูกบอลมา 3 ลูกพร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลมีสีเหมือนกัน 2 ลูกเท่านั้น

7. ลูกบอลหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกันอยู่ 10 ลูก เป็นสีแดง 3 ลูก สีขาว 5 ลูก สีดำ 2 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วจากถุงสองครั้ง ๆ ละลูกโดยไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกที่สองเป็นสีแดงเท่ากับเท่าใด
8. ในการตอบปัญหารายการหนึ่ง ปรากฏว่ามีผู้ตอบถูก 10 คน เป็นชาย 7 คน หญิง 3 คน ในการให้รางวัลซึ่งมีเพียง 2 รางวัล ใช้วิธีการจับสลากชื่อผู้ตอบถูก ความน่าจะเป็นที่ผู้ได้รับรางวัลเป็นชาย 1 คน และหญิง 1 คนเท่ากับเท่าใด
9. ล้อตเตอรี่ชนิดหนึ่งออกงวดละ 1000 ฉบับ และแต่ละงวดจะมีเพียง 1 ฉบับเท่านั้นที่ถูกรางวัล ในงวดหนึ่งนาย ก, ข, ค และ ง ซื้อ 6, 7, 12 และ 15 ฉบับตามลำดับ ถ้า p คือความน่าจะเป็นที่ทั้ง 4 คนนี้จะไม่ถูกรางวัลเลย จงหาค่าของ p
10. ในการเลือกจำนวนเต็มหนึ่งจากจำนวนเต็มตั้งแต่ 10 ถึง 59 จะได้ความน่าจะเป็นที่เลขจำนวนนั้นหารด้วย 7 ลงตัว หรือเป็นเลขคู่ เท่ากับเท่าใด
11. กล่องใบหนึ่งมี n ใบ ($n \geq 3$) ซึ่งเขียนหมายเลขกำกับไว้โดยไม่ซ้ำกัน เริ่มจาก 1 จนถึง n ถ้าหยิบบัตรออกมา 2 ใบ โดยสุ่มแล้วความน่าจะเป็นที่ได้ใบหนึ่งเป็นบัตรหมายเลข 3 และอีกใบหนึ่งเป็นบัตรหมายเลขต่ำกว่า 3 เท่ากับเท่าใด
12. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1 - 10 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีแต้มรวมกันเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดมีหมายเลขสูงกว่า 5 เท่ากับเท่าใด
13. คนกลุ่มหนึ่งเป็นนักศึกษา 14 คน เป็นกรรมกร 16 คน ในจำนวนนี้มีนักศึกษาและกรรมกรที่รู้จักกันอยู่อย่างละ 4 คน เท่ากัน ถ้าสุ่มเลือกตัวแทนจากคนกลุ่มนี้หนึ่งคน ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวแทนเป็นกรรมกรหรือเป็นผู้รู้จักกันอยู่เท่ากับเท่าใด
14. นักเรียน 4 ห้อง ส่งผู้แทนไปเลือกกรรมการห้องละ 2 คน เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน ความน่าจะเป็นที่จะคัดเลือกกรรมการ 4 คน จากผู้แทนทั้ง 8 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน โดยมีชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่มาจากห้องเดียวกันเท่ากับเท่าใด
15. ในการประกวดร้องเพลงรอบสุดท้ายมีผู้เข้ารอบ 3 คน ผู้เข้ารอบแต่ละคนต้องร้องเพลง เพียงหนึ่งเพลงโดยเลือกเพลงจากเพลงทั้งหมด 5 เพลง ที่กองประกวดจัดไว้ให้ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คน เลือกร้องเพลงเดียวกัน เท่ากับเท่าใด
16. กำหนดให้วัน หมายถึง วันอาทิตย์ วันจันทร์ วันอังคาร วันพุธ วันพฤหัสบดี วันศุกร์ วันเสาร์ ความน่าจะเป็นเป็นที่คน 2 คน จะเกิดวันต่างกันเท่ากับเท่าใด

17. เด็กคนหนึ่งเกิดในเดือนกันยายน เขาบอกเพื่อนคนหนึ่งว่าวันเกิดของเขาเป็นพหุคูณของเลข 3 หรือ สอดคล้องกับสมการ $x^3 - 10x^2 + 27x - 18 = 0$ จงหาความน่าจะเป็นที่เพื่อนจะทายวันเกิดของเขาได้ถูกต้อง
18. ในการแข่งขันตอบปัญหารายการหนึ่ง ผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนต้องเลือกปัญหา 4 ข้อ ในแต่ละครั้ง ถ้าในกล่องที่มีปัญหา มีปัญหาอย่างยากให้เลือกอยู่ 8 ข้อ และปัญหาอย่างง่ายให้เลือกอยู่ 6 ข้อ ความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขันจะเลือกได้ปัญหาอย่างยากและอย่างง่ายอย่างละ 2 ข้อ เท่ากับเท่าใด
19. แจกันใบหนึ่งมีดอกกุหลาบสีแดง 3 ดอก สีชมพู 3 ดอก สีส้ม 3 ดอก สีขาว 2 ดอก และสีเหลือง 2 ดอก สุ่มหยิบดอกไม้จากแจกันใบนี้มา 3 ดอก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ดอกไม้สีละดอกเท่ากับเท่าใด
20. มีแคปซูลซึ่งบรรจุยาชนิดหนึ่งจำนวน 5 แคปซูล ปนกับแคปซูลซึ่งบรรจุแป้ง จำนวน 10 แคปซูล ถ้าหยิบมา 2 แคปซูล อย่างสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้แคปซูลซึ่งบรรจุยาทั้งสองแคปซูลเท่ากับเท่าใด
21. สมชายมีเสื้ออยู่ 5 ตัว เป็นสีขาว 3 ตัว สีฟ้า 2 ตัว มีกางเกงขายาว 4 ตัว เป็นสีขาว 1 ตัวและสีเทา 3 ตัว ถ้าสมชายแต่งตัวออกจากบ้านโดยไม่เจาะจงแล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาสวมเสื้อ และกางเกงสีต่างกันเท่ากับเท่าใด