

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $\boxed{z = r \operatorname{cis} \theta}$

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

คือ $z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{2k\pi + \theta}{n}$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

(ก) n

และ $n \in \mathbb{N} - \{1\}$

รากที่ n ของ 1

$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1} \neq \sqrt[n]{-1}$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1}$

$= \sqrt{4} i$

$= 2i$

แบบฝึกหัด ทบทวน

7.5) รากที่สามของ $z_1 = -3 + 3i$

จาก 7.1) $z_1 = 3\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

รากที่สามของ z_1 คือ $(z_1)_k = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} \operatorname{cis} \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3}$

เมื่อ $k = 0, 1, 2$

$(z_1)_0 = \sqrt[3]{18} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

$(z_1)_1 = \sqrt[3]{18} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$

$(z_1)_2 = \sqrt[3]{18} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12}$

$\rightarrow (z_1)_0 = \sqrt[3]{18} \left(+\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

$\frac{2\pi + \frac{3\pi}{4}}{3}$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{4\pi + \frac{3\pi}{4}}{3}$

$= \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

7.6) จากโจทย์ $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

จาก 7.1) $z_2 = 4 \text{cis } \frac{4\pi}{3}$

จากโจทย์ z_2 คือ

$$(2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$(z_2)_k = \sqrt[4]{4} \text{cis } \frac{2k\pi + \frac{4\pi}{3}}{4} \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2, 3$$

$$(z_2)_0 = \sqrt{2} \text{cis } \frac{4\pi}{12} = \sqrt{2} \text{cis } \frac{\pi}{3}$$

$$(z_2)_1 = \sqrt{2} \text{cis } \frac{10\pi}{12} = \sqrt{2} \text{cis } \frac{5\pi}{6}$$

$$(z_2)_2 = \sqrt{2} \text{cis } \frac{16\pi}{12} = \sqrt{2} \text{cis } \frac{4\pi}{3}$$

$$(z_2)_3 = \sqrt{2} \text{cis } \frac{22\pi}{12} = \sqrt{2} \text{cis } \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{2\pi + \frac{4\pi}{3}}{4}$$

$$\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{4\pi + \frac{4\pi}{3}}{4}$$

$$\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$(z_2)_0 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$(z_2)_1 = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$(z_2)_2 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$(z_2)_3 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

[8] $\frac{1}{r \operatorname{cis} \theta} = \frac{1}{r} (\operatorname{cis} (-\theta))$
 ๑) ๒) ๓) ๔) ๕) ๖) ๗) ๘) ๙) ๑๐) ๑๑) ๑๒) ๑๓) ๑๔) ๑๕) ๑๖) ๑๗) ๑๘) ๑๙) ๒๐) ๒๑) ๒๒) ๒๓) ๒๔) ๒๕) ๒๖) ๒๗) ๒๘) ๒๙) ๓๐) ๓๑) ๓๒) ๓๓) ๓๔) ๓๕) ๓๖) ๓๗) ๓๘) ๓๙) ๔๐) ๔๑) ๔๒) ๔๓) ๔๔) ๔๕) ๔๖) ๔๗) ๔๘) ๔๙) ๕๐) ๕๑) ๕๒) ๕๓) ๕๔) ๕๕) ๕๖) ๕๗) ๕๘) ๕๙) ๖๐) ๖๑) ๖๒) ๖๓) ๖๔) ๖๕) ๖๖) ๖๗) ๖๘) ๖๙) ๗๐) ๗๑) ๗๒) ๗๓) ๗๔) ๗๕) ๗๖) ๗๗) ๗๘) ๗๙) ๘๐) ๘๑) ๘๒) ๘๓) ๘๔) ๘๕) ๘๖) ๘๗) ๘๘) ๘๙) ๙๐) ๙๑) ๙๒) ๙๓) ๙๔) ๙๕) ๙๖) ๙๗) ๙๘) ๙๙) ๑๐๐)

๑) ๒) ๓) ๔) ๕) ๖) ๗) ๘) ๙) ๑๐) ๑๑) ๑๒) ๑๓) ๑๔) ๑๕) ๑๖) ๑๗) ๑๘) ๑๙) ๒๐) ๒๑) ๒๒) ๒๓) ๒๔) ๒๕) ๒๖) ๒๗) ๒๘) ๒๙) ๓๐) ๓๑) ๓๒) ๓๓) ๓๔) ๓๕) ๓๖) ๓๗) ๓๘) ๓๙) ๔๐) ๔๑) ๔๒) ๔๓) ๔๔) ๔๕) ๔๖) ๔๗) ๔๘) ๔๙) ๕๐) ๕๑) ๕๒) ๕๓) ๕๔) ๕๕) ๕๖) ๕๗) ๕๘) ๕๙) ๖๐) ๖๑) ๖๒) ๖๓) ๖๔) ๖๕) ๖๖) ๖๗) ๖๘) ๖๙) ๗๐) ๗๑) ๗๒) ๗๓) ๗๔) ๗๕) ๗๖) ๗๗) ๗๘) ๗๙) ๘๐) ๘๑) ๘๒) ๘๓) ๘๔) ๘๕) ๘๖) ๘๗) ๘๘) ๘๙) ๙๐) ๙๑) ๙๒) ๙๓) ๙๔) ๙๕) ๙๖) ๙๗) ๙๘) ๙๙) ๑๐๐)

$$= \frac{\operatorname{cis} (-\theta)}{r \operatorname{cis} (\theta + (-\theta))}$$

$$= \frac{\operatorname{cis} (-\theta)}{r \operatorname{cis} 0}$$

$$= \frac{\operatorname{cis} (-\theta)}{r(1)}$$

$$= \frac{1}{r} \operatorname{cis} (-\theta)$$

$$(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

$$\frac{1}{r \operatorname{cis} \theta} = (r \operatorname{cis} \theta)^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis} (-1)\theta \checkmark$$

$$\begin{aligned} \cos 0 - i \sin 0 \\ = 1 + 0i \\ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.4) \quad z_3^{-1} &= (-2-2\sqrt{3}i)^{-1} = \frac{1}{-2-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{-2+2\sqrt{3}i}{-2+2\sqrt{3}i} \\
 &= \frac{-2+2\sqrt{3}i}{(-2)^2 - (2\sqrt{3}i)^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4+12} \\
 &= \frac{-2+2\sqrt{3}i}{16} = -\frac{2}{16} + \frac{2\sqrt{3}i}{16} \\
 &= -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}i}{8} \quad \# \quad \text{+}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_3^{-1} &= (-2-2\sqrt{3}i)^{-1} = (4\text{cis}\frac{4\pi}{3})^{-1} = 4^{-1}\text{cis}(-\frac{4\pi}{3}) \\
 &= \frac{1}{4}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}i}{8}
 \end{aligned}$$

สมการพหุนาม

ดีกรี n

$$p(x) = \underline{a_n}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$$a_n \neq 0$$

รากของสมการพหุนาม = คำตอบ ของสมการพหุนาม
 = ผลเฉลย ของสมการพหุนาม

๓.๔

✓ ทฤษฎีบทค่าคงที่

$x=c$ หรือ $p(x)$ ไม่สามารถหารลงตัว
 $x=c$ คือ $p(c)$

✓ ทฤษฎีบทตัวประกอบ

$x=c$ หรือ $p(x)$ "ลงตัว" ก็ต่อเมื่อ $p(c)=0$
 "ค่าที่แทนค่า c เป็นคำตอบของพหุนาม"

✓ ทฤษฎีบทตัวประกอบตรง:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

!! c ใดๆ ก็ตาม $p(c)=0$

c หารลงตัว $\left(\frac{k}{m}\right)$

เมื่อ k = ตัวประกอบของ a_0

m = a_n

สรุป

ทฤษฎีบท

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ (หรือ $\in \mathbb{Z}$)

ที่ $m+\sqrt{k}$ เป็นคำตอบ แล้ว $m-\sqrt{k}$ เป็นคำตอบด้วย

ที่ $a+bi$ $\longleftrightarrow$ $a-bi$

แบบฝึกหัดทบทวน

[๑] จงหาคำตอบของสมการกำลังสองต่อไปนี้

๑.๑) $x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2}$$

∴ ผลคำตอบของสมการคือ $\left\{ -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2} \right\}$

$$\left\{ -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2} \right\}$$

$$9.2) \quad x^3 + x^2 + x - 3 = 0 \quad (1)$$

สมมติให้ $k = \pm 1, \pm 3$ } $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 3$
 $m = \pm 1$

$C = 1$

1	1	1	-3
↓	↓	↓	↓
1	2	3	0

10/10

$x = 1$ no: $x^2 + 2x + 3 = 0$

$m + \sqrt{n}$
 $a + bi$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}i$$

$\therefore$ ผลลัพธ์ของสมการคือ $\{ 1, -1 \pm \sqrt{2}i \}$