



# โรงเรียนกุหลาบวิทยาลัย

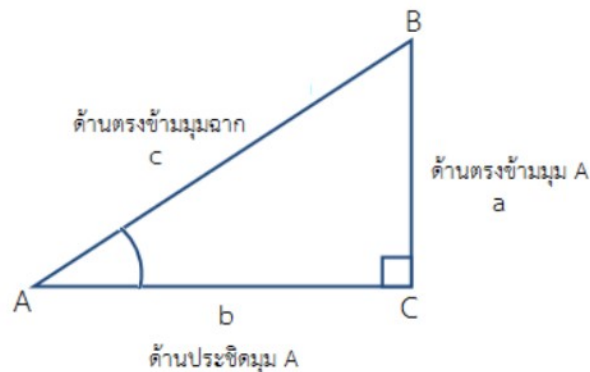
## เอกสารประกอบการเรียนเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

วิชา เสริมทักษะคณิตศาสตร์ 4 ชั้น ม.2/\_\_\_ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564

ชื่อ \_\_\_\_\_ เลขที่ \_\_\_\_\_

### อัตราส่วนตรีโกณมิติ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio) หมายถึง อัตราส่วนของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี ACB เป็นมุมฉาก ถ้าพิจารณามุม A จะได้ว่า

1. ด้าน \_\_\_\_\_ เรียก ด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาว \_\_\_\_\_ หน่วย
2. ด้าน \_\_\_\_\_ เรียก ด้านตรงข้ามมุม A ยาว \_\_\_\_\_ หน่วย
3. ด้าน \_\_\_\_\_ เรียก ด้านประชิดมุม A ยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

ไซน์ (sine) ของมุม A เขียนแทนด้วย  $\sin A$

$\sin A =$ _____
------------------

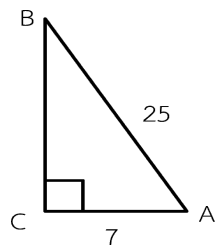
โคไซน์ (cosine) ของมุม A เขียนแทนด้วย  $\cos A$

$\cos A =$ _____
------------------

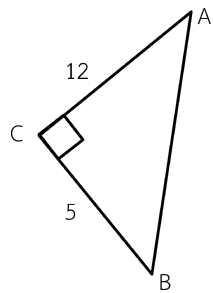
แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A เขียนแทนด้วย  $\tan A$

$\tan A =$ _____
------------------

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุม A และมุม B จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

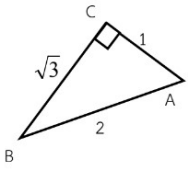
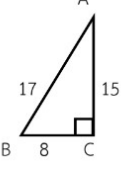
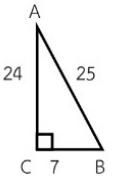
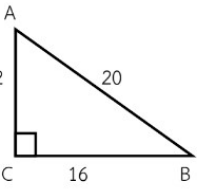
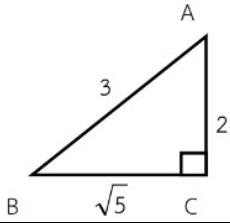
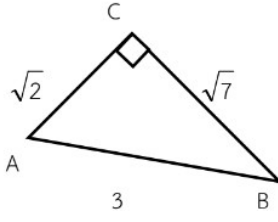
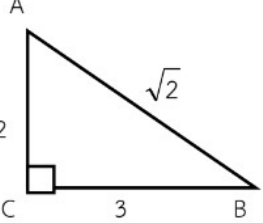


ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุม A และมุม B จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

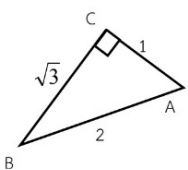
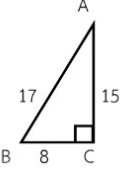


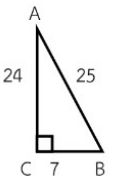
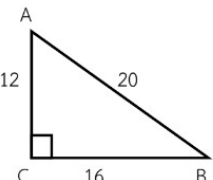
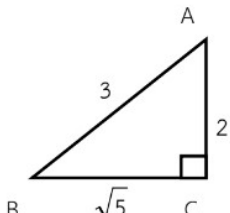
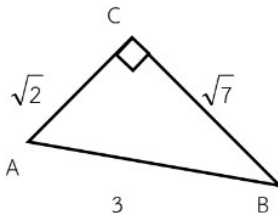
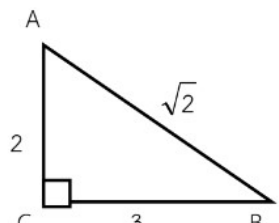
## แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาค่าไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมที่กำหนดให้ จากรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

<p>1)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\cos B = \text{---}</math>  <math>\tan B = \text{---}</math> </div> </div>	<p>2)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\tan B = \text{---}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>\tan A = \text{---}</math>  <math>\cos B = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math> </div> </div>
<p>3)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\cos B = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math>  <math>\sin B = \text{---}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>\tan B = \text{---}</math>  <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math> </div> </div>	<p>4)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\tan B = \text{---}</math>  <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math> </div> </div>
<p>5)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\cos B = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math>  <math>\sin B = \text{---}</math> </div> </div>	<p>6)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math> </div> </div>
<p>7)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math> </div> </div>	

2. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเติมคำตอบในช่องว่างให้ถูกต้อง

<p>1)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\cos B = \text{---}</math>  <math>\tan B = \text{---}</math> </div> </div>	<p>2)</p>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\tan B = \text{---}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>\tan A = \text{---}</math>  <math>\cos B = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math> </div> </div>
--	--

<p>3)</p>  <p> <math>\cos B = \text{---}</math>      <math>\tan B = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math>      <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\sin B = \text{---}</math>      <math>\cos A = \text{---}</math> </p>	<p>4)</p>  <p> <math>\tan B = \text{---}</math>  <math>\sin A = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math> </p>
<p>5)</p>  <p> <math>\cos B = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math>  <math>\sin B = \text{---}</math> </p>	<p>6)</p>  <p> <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math> </p>
<p>7)</p>  <p> <math>\sin B = \text{---}</math>  <math>\cos A = \text{---}</math>  <math>\tan A = \text{---}</math> </p>	<p>8.</p>

### อัตราส่วนตรีโกณมิติอื่น

โคเซแคนต์ (cosecant) ของมุม A เขียนแทนด้วย cosec A หรือ csc A

$$\text{cosec } A = \text{---}$$

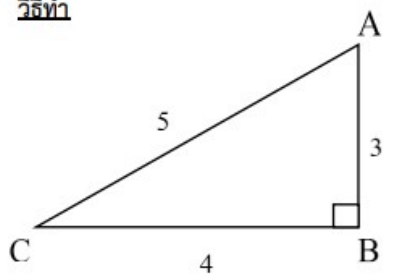
เซแคนต์ (secant) ของมุม A เขียนแทนด้วย sec A

$$\text{sec } A = \text{---}$$

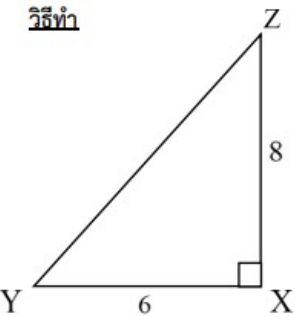
โคแทนเจนต์ (cotangent) ของมุม A เขียนแทนด้วย cot A

$$\text{cot } A = \text{---}$$

ตัวอย่างที่ 3 รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉากดังรูป จงหา

<p><b>วิธีทำ</b></p> 	$\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\operatorname{cosec} A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sec A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cot A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cos B = \underline{\hspace{2cm}}$ $\tan B = \underline{\hspace{2cm}}$ $\operatorname{cosec} B = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sec B = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cot B = \underline{\hspace{2cm}}$
--	--

ตัวอย่างที่ 4 รูปสามเหลี่ยม XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม X เป็นมุมฉากดังรูป จงหา

<p><b>วิธีทำ</b></p> 	$\sin Y = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cos Y = \underline{\hspace{2cm}}$ $\tan Y = \underline{\hspace{2cm}}$ $\operatorname{cosec} Y = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sec Y = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cot Y = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sin Z = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cos Z = \underline{\hspace{2cm}}$ $\tan Z = \underline{\hspace{2cm}}$ $\operatorname{cosec} Z = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sec Z = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cot Z = \underline{\hspace{2cm}}$
---	--

ตัวอย่างที่ 5 รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า  $AB = 5$ ,  $AC = 13$  จงหา

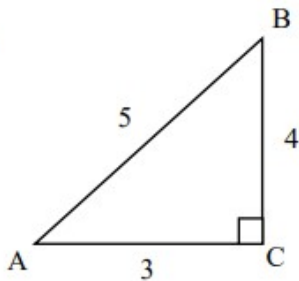
	$\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\operatorname{cosec} A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sec A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cot A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sin C = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$ $\tan C = \underline{\hspace{2cm}}$ $\operatorname{cosec} C = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sec C = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cot C = \underline{\hspace{2cm}}$
--	--

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้  $\sin A = \frac{4}{5}$  จงหา  $\operatorname{cosec} A$ ,  $\cos A$  และ  $\tan A$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้  $\triangle ABC$  มีมุม  $C$  เป็นมุมฉาก ถ้า  $\cot A = 2$  จงหา  $\sin B + \cos A$

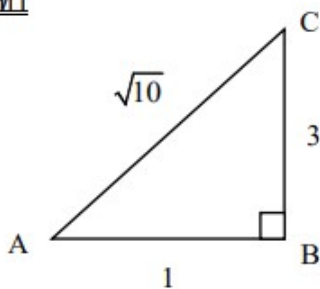
ตัวอย่างที่ 8 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $ABC$  จงหา  $\sin^2 A$ ,  $\cos^2 A$  และ  $\tan^2 A$

วิธีทำ



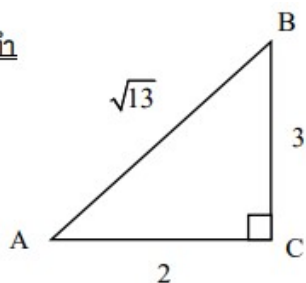
ตัวอย่างที่ 9 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $ABC$  จงหา  $\sin^2 A + \cos^2 A + \tan^2 C$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 10 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จงหาค่าของ  $x$  จากสมการ  $x\sin^2 A + \cos^2 B = \frac{9}{13}\tan^2 B$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 11 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง  $\sin A = 0.6$  จงหาค่าของ  $2\tan A + 3\sec A$

ตัวอย่างที่ 12 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง  $\tan A = 3$  จงหาค่าของ  $3\sin^2 A + 4\cos^2 A$

ตัวอย่างที่ 13 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง  $\sec A = 2$  จงหาค่าของ  $\cot^2 A + \sqrt{3}\operatorname{cosec} A$

## แบบฝึกหัดที่ 2

- กำหนดให้  $8\sec A = 17$  จงหา  $\sin A$ ,  $\cos A$  และ  $\tan A$
- รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า  $\operatorname{cosec} A = 4$  จงหา
  - $\sin B + \cos A$
  - $\cos A - \cos B$
- รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก ถ้า  $\sec C = \sqrt{3}$  จงหา
  - $(\cot B)(\tan C)$
  - $\sec^2 B$
  - $\frac{\csc C}{\csc B}$
- รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง  $\cot A = 2.4$  จงหาค่าของ  $2\sin A \cos A$
- รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง  $5\cos A = 3$  จงหาค่าของ  $3\tan A \operatorname{cosec} A$
- รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง  $24\operatorname{cosec} A = 25$  จงหาค่าของ  $5\cot A \sec A$



ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่ควรทราบ

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sin			
cos			
tan			
cosec			
sec			
cot			

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของ  $\cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \sin 30^\circ \cdot \tan 45^\circ$

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่า  $(\sin 60^\circ)(\tan 30^\circ)(\sec 60^\circ) + (\cot 45^\circ)(\operatorname{cosec} 30^\circ)$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่าของ  $\sin^2 45^\circ \cos^2 60^\circ + \cot^2 60^\circ \sin^2 30^\circ$

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่า  $2\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cot 60^\circ$

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่าของ  $\tan^2 60^\circ + 4\cos^2 45^\circ + 3\sec^2 30^\circ$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่า  $\frac{\tan^2 30^\circ \cos^2 60^\circ + \tan^2 60^\circ \sin^2 30^\circ}{6\sin 45^\circ \cos 45^\circ}$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาค่า  $\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\sec^2 60^\circ \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 45^\circ \tan^2 60^\circ$

2. จงหาค่า  $\tan^2 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan^2 60^\circ$

3. จงหาค่าของ  $\cot^2 45^\circ + \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{3}{4}\cot^2 60^\circ$

4. จงหาค่า  $3\tan^2 30^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 30^\circ - \frac{1}{2}\cos^2 45^\circ - \frac{1}{3}\sin^2 60^\circ$

5. จงหาค่า  $\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \sec^2 60^\circ \cdot \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 45^\circ \cdot \tan^2 60^\circ$

6. จงหาค่า  $3 \tan^2 60^\circ + \frac{4}{3} \cos^2 30^\circ - \frac{1}{2} \cot^3 45^\circ - \frac{2}{3} \sin^2 60^\circ \cdot \frac{2}{3} \sec^4 60^\circ$

7. จงหาค่า  $\cot^2 30^\circ - 2 \cos^2 60^\circ - \frac{3}{4} \sec^2 45^\circ - 4 \sin^2 30^\circ$

8. จงหาค่าของ  $\frac{10\sqrt{7\cot^2 45^\circ + 4\cos 6^\circ}}{3\cos 30^\circ \sec 60^\circ}$

9. จงหาค่า  $\tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ - \tan 60^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ$