เมทริกซ์

ความหมาย สัญลักษณ์ และขนาดของเมทริกซ์

เมทริกซ์ ก็คือ ระบบที่มีการจัดเรียงจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนให้เป็นแถว แต่ละแถวมีจำนวนเท่ากัน ภายในเครื่องหมาย ( ) [ ] โดยแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ เรียกว่า สมาชิก

พิจารณา เมทริกซ์ที่กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์ข้างต้นได้ว่า

1. ชื่อเมทริกซ์ ใช้ตัวอักษรพิมพ์ใหญ่

2. แนวนอนของเมทริกซ์ เรียก แถว และแนวตั้งของเมทริกซ์ เรียก หลัก จากเมทริกซีข้างต้น มี _____ แถว และ ______ หลัก

3. ขนาดของเมทริกซ์หรือมิติของเมทริกซ์ คือ จำนวนแถวทั้งหมด คูณ จำนวนหลักทั้งหมด (ไม่ต้องหาผลคูณ) จากเมทริกซ์ข้างต้นมีมิติ _________

4. สมาชิกของเมทริกซ์ใช้สัญลักษณตัวอักษรพิมพ์เล็กแล้วมีหัวห้อยซึ่งบอกแถวและหลักของเมทริกซ์ เช่น $a_{12} =$_________ และ $a_{23} =$_________

5. โดยทั่วไปจะเขียนสัญลักษณ์เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 1 จงบอกจำนวนแถว หลักและมิติ พร้อมทั้งหาสมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 1 ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

เมทริกซ์	แถว	หลัก	มิติ	สมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 1
$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$				
$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$				
$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$				
$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$				

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ โดยที่ $a_{ij}=\begin{cases} i & ; i<j \\ 0 & ; i=j \\ -a_{ij} & ; i>j \end{cases}$

แบบฝึกหัด 1

1. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 4 \\ -2 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

   1.1) ขนาดของ A

   1.2) $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{23}, a_{32}$

2. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ จงหา

   2.1) ขนาดของ A, B, C

   2.2) $a_{12}+b_{21}+c_{22}$

   2.3) $a_{21}+b_{13}-c_{23}$

   2.4) $2a_{22}+10b_{12}+3c_{12}$

3. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา

   3.1) ขนาดของ A, B

   3.2) $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$

   3.3) $a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}+a_{13}b_{32}$

   3.4) $a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}$

   3.5) $a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$

4. จงเขียนเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ โดยที่ $a_{ij}=2(i-j)$

5. จงเขียนเมทริกซ์ $B=[b_{ij}]_{4\times 4}$ โดยที่ $b_{ij}=\begin{cases} i+j; i<j \\ 5 \quad ; i=j \\ i-j; i>j \end{cases}$

6. กำหนด $C=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงเขียนสมาชิกของ c_{ij} ในรูปแบบบอกเงื่อนไข

7. กำหนด $D=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & 9 & 7 \\ -5 & -6 & -7 & 16 \end{bmatrix}$ จงเขียนสมาชิกของ d_{ij} ในรูปแบบบอกเงื่อนไข

ชนิดของเมทริกซ์

เมทริกซ์แถว เป็นเมทริกซ์ที่มีเพียงแถวเดียว

เมทริกซ์หลัก เป็นเมทริกซ์ที่มีเพียงหลักเดียว

เมทริกซ์ศูนย์ เป็นเมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกเป็นศูนย์

เมทริกซ์จัตุรัส เป็นเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน โดยมีแนวสมาชิก a_{ii} เป็นเส้นทแยงมุมหลัก

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เมทริกซ์สามหลี่ยม เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน หรือ เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

เมทริกซ์เฉียง เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักไม่เป็นศูนย์ แต่สมาชิกในตำแหน่งอื่น ๆ เป็นศูนย์

เมทริกซ์สเกลาร์ เป็นเมทริกซ์เฉียงที่แนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าคงที่เดียวกันทั้งหมด

เมทริกซ์เอกลักษณ์ เป็นเมทริกซ์สเกลาร์ที่ค่าคงที่ในแนวเส้นทแยงมุมหลักทั้งหมดเท่ากับ 1

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และเมทริกซ์ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ ทั้งสองมีมิติเดียวกัน และทุกสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน นั่นคือ $a_{ij} = b_{ij}$ เขียนแทนด้วย $A = B$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1-4 & \frac{16}{2} \\ \sqrt{4} & 2\times 2 \end{bmatrix}$

2) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3) $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F = [0]$

4) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

5) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} cos0 & log_{\frac{1}{2}}4 \\ log1 & sin\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x^2-2x+3=0$ และ

$A=\begin{bmatrix} x^2-x+1 & 2x-3 \\ 8 & x^2-3x-7 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} x-2 & x^2 \\ x^2-2x+11 & 2x^2-5x-4 \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่า A เท่ากับ B หรือไม่

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ x, y, z ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ z & cos0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 2 & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3y+8 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} |2x-1| & sin0 \\ 0 & y^2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ log1 & 4y \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเท่ากันหรือไม่

1.1) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\ln e & 3\\ 2 & \ln 1\end{bmatrix}$

1.2) $C=[1 \quad 0 \quad 2], D=[1 \quad 2]$

1.3) $E=\begin{bmatrix}sin0 & cos90°\\ 1 & 0\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}0 & 0\\ sin90° & cos180°\end{bmatrix}$

1.4) $G=\begin{bmatrix}log_2 8 & \sqrt{5}\\ \frac{2}{3} & 1-log2\end{bmatrix} H=\begin{bmatrix}3 & 2^{log_4 5}\\ log_{27}9 & log5\end{bmatrix}$

2. ถ้า x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x^2-2x-1=0$ และ $A=\begin{bmatrix}2x+1 & -x-1\\ x^2-1 & x^2+x\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x^2 & x-x^2\\ 2x & 2x^2-1\end{bmatrix}$ แล้ว A เท่ากับ B หรือไม่

3. จงหาค่าของ x,y,z ในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1) $\begin{bmatrix}3 & x & -1\\ -1 & y & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ -1 & 2 & z\end{bmatrix}$

3.2) $\begin{bmatrix}2x-y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 4x-2y & 2\end{bmatrix}$

3.3) $\begin{bmatrix}|2x-1| & -1\\ y^2-1 & 1\\ 1 & z+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|3-x| & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 7\end{bmatrix}$

3.4) $\begin{bmatrix}log_2 x & 1\\ log_2 4 & logy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & log10\\ 2 & log^2 y\end{bmatrix}$

4. กำนหด $x\in[0,2\pi]$ จงหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix}1 & sin2x\\ \mathrm{sin}0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 0 & \mathrm{cosx}\\ 0 & \cos 180°\end{bmatrix}$

5. กำนหดให้ $A=\begin{bmatrix}sinx & cos2x\\ cos^2x & tan^2x\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & a\\ b & c\end{bmatrix}$ ถ้า $A=B$ แล้วค่าของ $8a+16bc$ เท่ากับเท่าใด

การบวกและการลบเมทริกซ์

บทนิยาม ให้ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

ผลบวกของ A และ B เขียนแทนด้วย $A+B$ ซึ่ง $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

ผลลบของ A และ B เขียนแทนด้วย $A-B$ ซึ่ง $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 4 & -6\end{bmatrix}$ จงหา

1) $A+B$ 2) $B+A$ 3) $A+D$ 4) $\left(A+B\right)+C$

5) $A+(B+C)$ 6) $A-B$ 7) $B-A$ 8) $A-D$

9) $\left(A-B\right)-C$ 10) $A-(B-C)$ 11) $\left(A-B\right)+C$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 6 & -4 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ -6 & 4 & -5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ จงหา

1) $A+B$ 2) $B+A$ 3) $A+C$ 4) $B+C$

5) $A-B$ 6) $B-A$ 7) $A-D$ 8) $\left(A-B\right)-C$

9) $A-(B-C)$

สมบัติเกี่ยวกับการบวกและการลบเมทริกซ์ เมื่อ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \underline{\boldsymbol{0}}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$

1) สมบัติปิดการบวก นั่นคือ ________________
2) สมบัติสลับที่การบวก นั่นคือ _________________
3) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก นั่นคือ _________________
4) สมบัติเอกลักษณ์การบวก นั่นคือ _________________
5) สมบัติตัวผกผันการบวก นั่นคือ ________________

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่า X จาก

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} - X - \begin{bmatrix} -2 & 6 & -7 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนด $\begin{bmatrix} xy & 2 \\ 3z & 2y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2z & 2 \\ 4 & -\mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & -8 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $x + y + z$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาผลบวกและผลต่างของเมทริกซ์ต่อไปนี้

   1.1) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

   1.2) $\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 8 & -7 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   1.3) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right)$

   1.4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}\right)$

   1.5) $\begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 3 & 51 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -10 & 8 \\ -7 & -50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\right)$

2. จงหาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

   2.1) $X - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

   2.2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} - X + \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

   2.3) $X + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \underline{0}$

   2.4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -5 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

3. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} a+2c & 3 \\ 1 & b-d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & d \\ 3-a & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ a & d \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $a \cdot b \cdot c \cdot d$

การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ผลคูณของ k และ A เขียนแทนด้วย kA ซึ่ง $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $2A$ 2) $-3B$ 3) $2(A+B)$ 4) $2A+2B$

5) $(2-3)A$ 6) $2A-3A$

สมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง เมื่อ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ และ $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ เป็นจำนวนจริง

1. $1A = A, (-1)A = -A$
2. $cA + dA = (c+d)A$ และ $A + A + A + \cdots + A(c \text{ ตัว}) = cA$
3. $cA + cB = c(A+B)$
4. $\big(cA\big)(dB) = \big(cd\big)AB$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการ $2X - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

1) $2A - 3X = 3B - 3C$

2) $\frac{5}{2}(X - 2A) = 2[2X - (X + 3B)] + 4C$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $2\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ x+2z & 2x-y \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} x-y & 2 \\ 2 & y \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ z & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $x+y+z$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงหาค่าของ

   1.1) $2\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

   1.2) $3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -7\end{bmatrix}-\left(4\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}7 & 1\\ -2 & 5\end{bmatrix}\right)$

   1.3) $2\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\left(3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right)$

   1.4) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 5 & -7\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

2. จงหาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

   2.1) $2\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-X=\underline{0}$

   2.2) $2X-\begin{bmatrix}6 & 1 & 2\\ 2 & 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

   2.3) $2\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}X=3\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ 2 & -5 & -1\end{bmatrix}$

   2.4) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ -2 & -4 & -2\\ 6 & 4 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}X=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

3. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-5 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

   3.1) $\frac{1}{3}(3X+6C)=\frac{1}{2}(3X-4A)$

   3.2) $5(X+A)+B=2[5X+(C-3X)]$

   3.3) $\frac{5}{3}(3X+\frac{9}{5}B+\frac{6}{5}C)=6(\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}A+\frac{1}{6}B)$

4. กำหนดให้ $3\begin{bmatrix}x+y & 2\\ 2x+y & x-z\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}x+2y & 1\\ x-y & z\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{25}{4} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $x(2y+z)$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

> เมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และเมทริกซ์ $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณ AB จะเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m\times p$ เ
> สมมติให้ $AB=C=[c_{ij}]_{m\times p}$ โดยที่ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

ตัวอย่างที่ 14 จงพิจารณาผลคูณของเมทริกซ์แต่ละข้อต่อไปนี้หาผลคูณได้หรือไม่ ถ้าได้หาผลลัพธ์ของผลคูณจะได้มีเมทริกซ์ขนาดเท่าใด

กำหนด	ผลคูณ	หาผลคูณได้หรือไม่	ขนาดของผลลัพธ์ของเมทริกซ์
1. $A=[a_{ij}]_{2\times3}, B=[b_{ij}]_{3\times2}$	AB		
2. $A=[a_{ij}]_{2\times3}, B=[b_{ij}]_{3\times2}$	BA		
3. $C=[c_{ij}]_{4\times3}, D=[d_{ij}]_{3\times3}$	CD		
4. $C=[c_{ij}]_{4\times3}, D=[d_{ij}]_{3\times3}$	DC		
5. $E=[e_{ij}]_{3\times4}, F=[f_{ij}]_{3\times4}$	EF		
6. $E=[e_{ij}]_{3\times4}, F=[f_{ij}]_{3\times4}$	FE		

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1) AB 2) BA

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$ จงหาผลคูณของ

1) AB 2) BA 3) BC 4) CB 5) CD 6) DC

7) AD 8) DA

.

สมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ เมื่อ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสามารถหาผลคูณกันได้

1. $AB + AC = A(B+C)$ และ $BA + CA = (B+C)A$
2. $(AB)C = A(BC)$
3. ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้ว ________________
4. ถ้า $A^2 = \underline{0}$ แล้ว ________________

ตัวอย่างที่ 17 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $A(B+C)$ 2) $AB + AC$ 3) $(B+C)A$ 4) $BA + CA$

5) $(2A)(3B)$ 6) $6(AB)$ 7) A^2 8) A^3

9) A^4 10) A^2B 11) A^2BA 12) $(A+B)^2$

13) $(A-B)^2$ 14) $(A+B)(A-B)$ 15) $A^2 + 2AB + B^2$

16) $A^2 - 2AB + B^2$ 17) $A^2 - B^2$

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า ab ที่ทำให้ $A^2 = -I$

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 5x + 2$ และ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ จงหาค่า a ที่ทำให้ $f(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ จงหา θ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ที่ทำให้ $A^4 = I$

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงพิจารณาว่าแต่ละข้อต่อไปนี้หา AB หรือ BA ได้หรือไม่ ถ้าได้จะมีขนาดเท่าไร

1.1) $A=[a_{ij}]_{3\times4}, B=[b_{ij}]_{4\times3}$ 1.2) $A=[a_{ij}]_{3\times2}, B=[b_{ij}]_{2\times4}$

1.3) $A=[a_{ij}]_{5\times3}, B=[b_{ij}]_{4\times5}$ 1.4) $A=[a_{ij}]_{4\times3}, B=[b_{ij}]_{4\times3}$

2. จงหาผลคูณของ

2.1) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 2.2) $\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

2.3) $\begin{bmatrix}4 & 1\\ -6 & -3\\ 8 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$ 2.4) $\begin{bmatrix}5 & 4\\ -3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -8\\ -5 & 6\end{bmatrix}$

2.5) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 3 & 2\\ -1 & 6\end{bmatrix}$

3. จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ในข้อใดบ้างที่ $AB=BA$

3.1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ 3.2) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

3.3) $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ 3.4) $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

4. กำหนด $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ และ $f(x)=x^2-2x+3$ จงหา $f(A)$

5. กำหนด $A=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ และ $f(x)=2x^2+3x-5$ จงหา $f(A)$

6. กำหนด $A=\begin{bmatrix}a & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ จงหา a ที่ทำให้ $A^2-\mathrm{B}^2=-6\mathrm{I}$

7. กำหนด $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ จงหา A ที่ทำให้ $AB=BA$

8. กำหนด $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ จงหา a ที่ทำให้ $(A+B)^2=4I$

9. กำหนด $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ จงหาค่า a ที่ทำให้ $AB=I$

10. กำหนด $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ จงหาค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $A^n=\begin{bmatrix}1 & 20\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

11. กำหนด $A=\begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\ -sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$ จงหามุม θ โดยที่ $0\le\theta\le2\pi$ และ $A^4=-I$

12. กำหนด $A=\begin{bmatrix}2 & a\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ จงหาค่า a ที่ทำให้ $A^2-2A+I=\underline{0}$

ทรานสโพสของเมทริกซ์ (Transpose of a matrix)

เมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ แล้วทรานโพสของ A เขียนแทนด้วย $A^t=[b_{ij}]_{n\times m}$ โดยที่ $b_{ij}=a_{ji}$

ตัวอย่างที่ 21 จงหาทรานสโพสของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A=\begin{bmatrix}5 & -7 & 6 & -8\end{bmatrix}$
2) $B=\begin{bmatrix}-5\\ 3\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$
3) $C=\begin{bmatrix}2 & 8 & -9\\ 7 & -6 & 5\end{bmatrix}$

4) $D=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$
5) $E=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}$
6) $F=\begin{bmatrix}6 & -5 & 2\\ -8 & 7 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

7) $G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$
8) $H=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & -5 & 6\end{bmatrix}$
9) $K=\begin{bmatrix}0 & -6 & -4\\ 6 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 22 กำหนด $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ -1 & -3 & -5\end{bmatrix}$ จงหาค่า

1) A^t 2) $(A^t)^t$ 3) $((A^t)^t)^t$

ตัวอย่างที่ 23 กำหนด $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1) $(A+B)^t$ 2) A^t+B^t 3) $(A-B)^t$ 4) A^t-B^t

5) $(AB)^t$ 6) A^tB^t 7) B^tA^t 8) $(ABC)^t$

9) $C^tB^tA^t$ 10) $(2A)^t$ 11) $2A^t$

สมบัติของทรานโพสของเมทริกซ์

1) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
2) $(AB)^t = B^t A^t$
3) $(ABC)^t = C^t B^t A^t$
4) $(kA)^t = kA^t$
5) $(A^t)^t = A$

ตัวอย่างที่ 24 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสและ $B = A + A^t$ จงแสดงว่า B เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ตัวอย่างที่ 25 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสและ $B = A - A^t$ จงแสดงว่า B เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร

ตัวอย่างที่ 26 กำหนด A, B, C เป็นเมทริกซ์ที่สามารถหาผลคูณ $A(B+C)$ ได้ จงพิสูจน์ว่า $[3A(B+2C)]^t = 6C^tA^t + 3B^tA^t$

ตัวอย่างที่ 27 กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์ที่ $AB = A$ และ $BA = B$ จงพิสูจน์ว่า $(A^t)^2 = A^t$

ตัวอย่างที่ 28 กำหนด $A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า a ที่สอดคล้องกับสมการ $A^tB+AB=(2C^t)$

ตัวอย่างที่ 29 กำหนด $A=\begin{bmatrix} b-a & 1 \\ b-2a & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า a, b ที่สอดคล้องกับสมการ $A^tB-2BA+B=(C^t)^t$

แบบฝึกหัดที่ 6

1. กำหนด $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา

   1.1) A^t 1.2) B^t 1.3) C^t 1.4) $(A+B)^t$ 1.5) $(BC)^t$ 1.6) A^tC^t

   1.7) $(3A)^t$ 1.8) $[C(A+B)]^t$

2. กำหนด A, B, C เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีขนาดเท่ากัน จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

   2.1) $(2ABC)^t=2A^tBC^t$

   2.2) $(A+2B-C)^t=A^t+2B^t-C^t$

   2.3) $[3A^t(B+4C)]^t=3B^tA+12C^tA$

   2.4) ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตรและ $B=C^tAC$ แล้ว B เป็นเมทริกซ์สมมาตร

   2.5) ถ้า A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตรแล้ว A^2 เป็นเมทริกซ์สมมาตร

   2.6) ถ้า $AB=A$ แล้ว $B^tA^t=A^t$

2.7) ถ้า $AB = A^t$ แล้ว $B^tA^t = A$

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา a ที่สอดคล้องกับสมการ $(A^t)^tB + (B^tA)^t = (4C^t)$

4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} a+2b & 2 \\ 0 & 2a+b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $a-b$ ที่สอดคล้องกับสมการ $AB^t + (A^tB)^t = (2C)^t$

ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant)

เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ดีเทอร์มิแนนท์ของ A เขียนแทนด้วย $detA$ หรือ $|A|$ หรือ $|a_{ij}|$

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด $\mathbf{1 \times 1}$

ถ้า $A = [a]$ แล้ว $detA = a$

ตัวอย่างที่ 30 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = [10]$ 2) $B = [-3]$ 3) $C = [20]$ 4) $D = [0]$

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด $\mathbf{2 \times 2}$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $detA = ad - bc$

ตัวอย่างที่ 31 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ 3) $C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 4) $D = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด $\mathbf{3 \times 3}$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ แล้ว $detA = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

ตัวอย่างที่ 32 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 33 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $detA$ 2) $detB$ 3) $\det\,(AB)$ 4) $\big(detA\big)(detB)$ 5) $detA^t$

6) $detB^t$ 7) $detA^{-1}$ 8) $detB^{-1}$ 9) $detA^2$ 10) $(detA)^2$

11) $det\ (A+B)$ 12) $detA + detB$ 13) $\det\,(A-B)$ 14) $detA - detB$

15) $det\ (2A)$ 16) $2detA$ 17) $\det\,(3A)$ 18) $3detA$ 19) $det\ (4A)$ 20) 4^2detA

ตัวอย่างที่ 34 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $detA$ 2) $det2A$ 3) $2detA$ 4) $det3A$ 5) $27detA$

สมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ เมื่อ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ และ $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

1. $det(AB) = (detA)(detB)$
2. $det(A^m) = (detA)^m$
3. $det(A^t) = detA$
4. $det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$
5. $det(kA) = k^n det(A)$
6. $det(I) = 1$
7. ถ้าเปลี่ยนตัวเลขของแถวใดหรือหลักใดของเมทริกซ์โดยนำ k ไปคูณแถวใด หรือหลักใดมารวมกับแถวหรือหลักเดิมของมัน ค่า det ใหม่ ยังคงเท่าเดิม
8. การสลับแถวหรือหลักคู่หนึ่ง ๆ จะทำให้ค่าของ det ใหม่เป็นลบของค่า det เดิม
9. ถ้าเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทั้งแถวหรือทั้งหลักเป็นศูนย์ทั้งแถวหรือทั้งหลัก เมทริกซ์ดังกล่าวจะมีค่า det เท่ากับศูนย์
10. ถ้าเมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวหรือหลักเหมือนกันอย่างน้อย 1 คู่ ค่า det เท่ากับศูนย์
11. ถ้าเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณค่าคงที่เข้าไปที่แถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งค่า det ที่ได้จะเป็นจำนวนเท่าของค่าคงที่ที่คูณเข้าไปกับค่า det เดิม
12. ถ้าเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม แล้ว det จะเท่ากับผลคูณของเส้นทแยงมุมหลัก

ตัวอย่างที่ 35 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $detA$ 2) $detB$ 3) $detA^t$ 4) $detB^t$ 5) $detA^{-1}$ 6) $detB^{-1}$

7) $det\ (AB)$ 8) $det2A$ 9) $det3B$ 10) $det(A^{-1})^t$ 11) $det(2B^t)^{-1}$

12) $det(2B^{-1})^t$ 13) $det(2A)\,(3B)$ 14) $\det(3A^t)\,(2B)^{-1}$

15) $det\ (A+B)$ 16) $det(A^t - 2B)$

ตัวอย่างที่ 36 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 6) $F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 37 กำหนด $detA = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์

1) $B = \begin{bmatrix} f & d & e \\ c & a & b \\ i & g & h \end{bmatrix}$ 2) $C = \begin{bmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 38 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -50 & 100 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & -30 \end{bmatrix}$ 3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 4 & -20 & 4 \\ 6 & 30 & 6 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 5 & 10 & 20 \end{bmatrix}$ 5) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -10 & -20 & -30 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

6) $F = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -12 \\ 6 & -2 & 6 \\ -8 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 7) $G = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ 8) $H = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

9) $J = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ 10) $K = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$ 11) $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

12) $M = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 13) $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ 14) $O = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15) $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 \\ -8 & 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 16) $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงหาค่าของ

1.1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ 1.3) $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$ 1.4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 1.6) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

2. จงหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

2.1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -10 \end{vmatrix}$ 2.2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 2.3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -4 & 5 & 12 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$

2.4) $\begin{vmatrix} -50 & 120 & -84 \\ 30 & -50 & 37 \\ 10 & 20 & -10 \end{vmatrix}$ 2.5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix}$ 2.6) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2.7) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 2.8) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ 2.9) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2.10) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ 2.11) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 7 & 7 \end{vmatrix}$ 2.12) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 & -8 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ -10 & -5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

2.13) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 & -2 \\ -3 & 5 & -7 & 6 \\ -5 & 1 & -3 & 10 \end{vmatrix}$ 2.14) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 7 \\ -5 & 1 & -1 & -11 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ 2.15) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -2 & 1 & 5 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

2.16) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 20 & 33 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

3.1) $det\ (ABC)$ 3.2) $det\ (A^3B^tC^{-1})$ 3.3) $det(2A)\,(3B)^t)$

3.4) $det(((3A)(2C)^{-1}))^t$ 3.5) $det\ (2A^tB)^{-1}$ 3.6) $det\ (10A - B)$ 3.7) $det\ (A + C)^{-1}$

3.8) $det\ (BA + BC^t)^t$ 3.9) $det\ d(B - 2I)$

4. กำหนด $detA = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2, detB = \begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$ จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

4.1) $C=\begin{bmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{bmatrix}$ 4.2) $D=\begin{bmatrix} e & d & f \\ h & g & i \\ b & a & c \end{bmatrix}$ 4.3) $E=\begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$

4.4) $F=\begin{bmatrix} 2d & 2e & 2f \\ a+x & b+y & c+z \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 4.5) $G=\begin{bmatrix} 3d & 3f & 3e \\ -2g & -2i & -2h \\ a+x & c+z & b+y \end{bmatrix}$

4.6) $H=\begin{bmatrix} 2i & h & g \\ -6f & -3e & -3d \\ 2c+2z & b+y & a+x \end{bmatrix}$

5. กำหนด A และ B เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกหรือผิด

5.1) ถ้า $A=\underline{0}$ แล้ว $detA=0$ 5.2) ถ้า $A\neq\underline{0}$ แล้ว $detA\neq 0$

5.3) ถ้า $detA\neq 0$ แล้ว $A\neq\underline{0}$ 5.4) ถ้า $detA=0$ แล้ว $A=\underline{0}$

5.5) ถ้า $A=I_n$ แล้ว $detA=1$ 5.6) ถ้า $detA=1$ แล้ว $A=I_n$

5.7) ถ้า $detA\neq 1$ แล้ว $A\neq I_n$ 5.8) ถ้า $A\neq I_n$ แล้ว $detA\neq 1$

5.9) ถ้า $detA=detB$ แล้ว $A=B$ 5.10) ถ้า $A=B$ แล้ว $detA=detB$

5.11) ถ้า $A\neq B$ แล้ว $detA\neq detB$ 5.12) ถ้า $detA\neq detB$ แล้ว $A\neq B$

5.13) ถ้า $A^2=I_n$ แล้ว $detA=1$ 5.14) ถ้า $det(A+B)=detA+detB$

5.15) $det2A^{-1}=det(2A)^{-1}$ 5.16) $det(3A)(2B)=6(detA)(detB)$

5.17) $det\ (3A^tB)^{-1}=\frac{3^n}{(detA)(detB)}$ 5.18) $det\ (3A^{-1}B^t)^2=\frac{9^n(detB)^2}{(detA)^2}$

การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ด้วยโคแฟกเตอร์

ไมเนอร์

ไมเนอร์ของแถวที่ i หลักที่ j ของ A คือ ดีเทอร์มิแนนท์ที่ตัดแถวที่ i หลักที่ j ออก เขียนแทนด้วย $M_{ij}(A)$

โคแฟกเตอร์

โคแฟกเตอร์ของแถวที่ i หลักที่ j ของ A เขียนแทนด้วย $C_{ij}(A)$ โดยที่ $C_{ij}(A)=(-1)^{i+j}M_{ij}(A)$

ตัวอย่างที่ 39 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ทั้งหมดของ A

การหาดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธีโคแฟกเตอร์

$detA =$ ผลบวกของผลคูณของสมาชิกแต่ละตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ A ด้วยโคแฟกเตอร์ของสมาชิกตัวนั้น

ตัวอย่างที่ 40 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัดที่ 8

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา

   1.1) ไมเนอร์ของสมาชิกทุกตัว 1.2) โคแฟกเตอร์ของสมาชิกทุกตัว

   1.3) ดีเทอร์มิแนนท์ของ A โดยใช้โคแฟกเตอร์ด้วยหลักที่ 3

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $C_{32}(A) + |M_{13}(A)|$

การแก้สมการและอสมการด้วยดีเทอร์มิแนนท์

ตัวอย่างที่ 41 กำหนด $A = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x^3 & 3x-1 \end{bmatrix}$ จงหาขอบเขตของ x ที่ทำให้ $detA$ มีค่าไม่น้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ตัวอย่างที่ 42 กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

ตวัอย่างที่ 43 กำหนดให้ $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา $detA$

ตัวอย่างที่ 44 กำหนด A, B, C เป็นเมทริกซ์ 2×2 โดย $detA^{-1} = det2I, det(B^t) = 8$ และ $A^tB^2C^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา $detC$

ตัวอย่างที่ 45 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = 2AB + B$ จงหาค่า a ที่ทำให้ $detC = 24$

ตัวอย่างที่ 46 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ จงหาค่า a ที่ทำให้ $det(3A^2) + (2a^2+1)^3\, det(A^{-1})^t = 40$

แบบฝึกหัดที่ 9

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3x \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 2x \end{bmatrix}$ จงหาจำนวนจริง x ที่ $detA = 0$
2. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
3. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
4. กำหนดให้ $A^3 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $detA$
5. กำหนด A, B, C เป็นเมทริกซ์ 2×2 โดย $det2A = 20, det(C^t)^{-1} = det3I$ และ $2A^{-1}B^tC^2 = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $detB$
6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้ $detA = detB$
7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 2-x \\ 2x-1 & 2-3x \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้ $detA > 0$
8. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ x & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} y-1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2z+1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -4 & -u \\ 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} x-4y-2 & 2u \\ z+3 & y-5 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $detA^3$
9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} cos2x & sin3x \\ -sin2x & cos3x \end{bmatrix}$ โดยที่ $x \in [0,2\pi]$ จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ $det(A^2) + det(-A^t) + det(2I) = 6$
10. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ $det(2AA^t) = det(16A^{-1})^t$

11. กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{4}A^t$ และ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 9 \\ 1 & v \end{bmatrix}$ ถ้า $M = \begin{bmatrix} 4x & -u \\ v & -y \end{bmatrix}$ เมื่อ $detA > 0$ แล้วค่าของ $detM$ คือเท่าใด

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

เมทริกซ์เอกฐาน

เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) ก็ต่อเมื่อ $detA = 0$

เมทริกซ์ A ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (non - singular matrix) ก็ต่อเมื่อ $detA \neq 0$

ตัวอย่างที่ 47 เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์เป็นเอกฐานเอกฐานหรือไม่

1) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 48 กำหนด $A = \begin{bmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & x \\ -3 & x & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซเอกฐาน

เมทริกซ์ผูกพัน

เมทริกซ์ผูกพัน (adjiont) ของ A เขียนแทนด้วย $adjA$ โดยที่ $adjA = [C_{ij}(A)]^t$

ตัวอย่างที่ 49 จงหาเมทริกซ์ผูกพันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ให้ A ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^{-1} โดยที่ $A^{-1} = \frac{1}{detA} adj(A)$

ตัวอย่างที่ 50 จงหาเมทริกซ์ผูกพันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 51 กำหนด $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A

ตัวอย่างที่ 52 กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$

ตัวอย่างที่ 53 กำหนดให้ $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & -5\\ 4 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -6\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ จงหา $a+b+c+d$

ตัวอย่างที่ 54 กำหนด $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$ และ $A^{-1}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$ จงหา $a+9b+c$

ตัวอย่างที่ 55 กำหนด $B=\begin{bmatrix}7 & -8\\ -6 & 12\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}6 & -10\\ -4 & 13\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ และ $AB-2I=AC+D$ จงหา A

ตัวอย่างที่ 56 กำหนด $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2 & 5 & 2\\ 1 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ และ $B(adjA)=C$ จงหา B

ตัวอย่างที่ 57 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $(AB)^{-1}$ 2) $A^{-1}B^{-1}$ 3) $B^{-1}A^{-1}$ 4) $(2A)^{-1}$

5) $2A^{-1}$ 6) $\frac{1}{2}A^{-1}$

ตัวอย่างที่ 58 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า

1) $detM_{31}(A)$ 2) $detM_{21}(A)$ 3) $detM_{31}(A^{-1})$ 4) $det\ (adjA)$

ตัวอย่างที่ 59 กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส 4×4 โดยที่ $detA = -2, |M_{24}(A)| = 3$ จงหา

1) $|M_{42}(2A)^t|$ 2) $det\ (3adjA)$

แบบฝึกหัดที่ 10

1. จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1.1) $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 1.2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$ 1.3) $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

1.4) $D = \begin{bmatrix} -sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & -sin\theta \end{bmatrix}$ 1.5) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 1.6) $F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

1.7) $G = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ 1.8) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1.9) $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.10) $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. จงหาค่า x ที่ทำให้เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

2.1) $A = \begin{bmatrix} 1 & sin^2x \\ -4cos^2x & -1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x \in [0,2\pi]$ 2.2) $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ x & 7 \end{bmatrix}$

2.3) $C = \begin{bmatrix} 2x^2 & -2 & -3x \\ -8 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา X ที่

3.1) $AX - B = C$ 3.2) $2A - XC = D + I$ 3.3) $CXA + 2I = B$

3.4) $XA - C = XD + X + 2D$

4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา

4.1) X ที่ $2XB^{-1} = A$ 4.2) X ที่ $(adjB)X = 4I$ 4.3) $det\ (2adjB)$

5. กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส 5×5 โดยที่ $|M_{53}(A)| = 2$ จงหา $|M_{35}(2A^t)|$

6. ให้ A, B, I เป็นเมทริกซ์ 3×3 และไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐานโดยที่ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $AB = I$ จงหาค่าของ $B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. กำหนดให้ A, B เป็นเมทริกซ์ 3×3 และ $B = A^t - A^{-1}, \det\ (adj(A)) = 9, 3(C - B) = adjA$ ถ้า $detA > 0$ ค่าของ $detC$ เท่ากับเท่าใด

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ จะมี $\det\ (adj(A))$ เท่ากับเท่าใด

9. ให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส 2×2 และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ 2×2 โดยที่ $A(adjA) - BA = I$ ถ้า $detB = -4$ แล้ว $detA$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

10. กำหนด $A = \begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ cos\theta & -sin\theta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ และ $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B^t$ ค่า y เท่ากับเท่าใด

11. กำหนด $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 6\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ และ $A=B-C$ โดยที่ $B=-B^t, C=C^t$ ถ้า $BC=D^t$ และ $D=[d_{ij}]_{3\times3}$ แล้วค่าของ $|d_{12}+d_{22}+d_{32}|$ เท่ากับเท่าใด

การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

กำหนดระบบสมการ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n &= b_3\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

เราสามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ คือ $AX=B$

โดยที่ $A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{nn} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีอินเวอร์สการคูณ

จาก $AX=B$ ดังนั้น $X=$ _______

ตัวอย่างที่ 60 กำหนด

$$\begin{aligned} 2x+y &= 3\\ x-3y &= 5 \end{aligned}$$

จงแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีอินเวอร์สการคูณ

ตัวอย่างที่ 61 กำหนด

$$2x - y + z = 5$$
$$3x + 2z = 7$$
$$-x + y - z = -6$$

จงแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีอินเวอร์สการคูณ

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีเมทริกซ์แต่งเติม

จาก $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์แต่งเติมได้ $\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$ แล้วนำเมทริกซ์แต่งเติมนี้มากระทำหรือดำเนินการตามแถว (row operation) ด้วยกระบวนการใดกระบวนการหนึ่งดังต่อไปนี้

1. สลับที่ระหว่างสองแถวใด ๆ ของเมทริกซ์แต่งเติม เขียน R_{ij} แทนการสลับที่ระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j
2. ใช้ค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์คูณสมาชิกทุกตัวของแถวใดแถวหนึ่ง เขียน cR_i แทนการคูณสมาชิกทุกตัว ในแถวที่ i ด้วยค่าคงที่ c โดยที่ $c \neq 0$
3. เปบี่ยนแปลงแถวใดแถวหนึ่งโดยใช้ค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์คูณสมาชิกทุกตัวในแภวอื่นแล้วนำมาบวกกับสมาชิกในแถวที่ต้องการเปลี่ยนแปลงในลำดับเดียวกัน เขียน $R_i + cR_j$ แทนการบวกแถวที่ i ด้วย c เท่าของแถวที่ j (แถวที่เปลี่ยนไปก็คือแถวที่ i)

พยายามตบแต่ง เมทริกซ์แต่งเติมด้วยกระบวนการดำเนินการตามแถวให้อยู่ในรูป $[I|C]$ ดังต่อไปนี้ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array}\right]$ จะได้คำตอบของระบบสมการเป็น $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ตามลำดับของ $x_1, x_2, \cdots, x_n$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์โดยการนำดำเนินการตามแถวโดย $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

ตัวอย่างที่ 62 กำหนด

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

จงแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีเมทริกซ์แต่งเติม

ตัวอย่างที่ 63 กำหนด

$$2x - y + z = 5$$
$$3x + 2z = 7$$
$$-x + y - z = -6$$

จงแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีเมทริกซ์แต่งเติม

ตัวอย่างที่ 64 จงหาอินเวอร์สการคูณของ A ด้วยวิธีดำเนินการตามแถวของเมทริกซ์แต่งเติมโดย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีกฎของคราเมอร์

จาก $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ แล้ว $x_1 = \frac{det\ (A_1)}{det A}, x_2 = \frac{det\ (A_2)}{det A}, x_1 = \frac{det\ (A_1)}{det A}, \cdots, x_n = \frac{det\ (A_n)}{det A}$ เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B

ตัวอย่างที่ 65 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -a^2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ แล้วค่า a ทั้งหมดที่ทำให้ระบบสมการ $AX = B$ หาคำตอบ X ได้

ตัวอย่างที่ 66 กำหนด

$$2x + y = 3$$
$$x - 3y = 5$$

จงแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีกฎของคราเมอร์

ตัวอย่างที่ 67 กำหนด

$$2x - y + z = 5$$
$$3x + 2z = 7$$
$$-x + y - z = -6$$

จงแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีกฎของคราเมอร์

แบบฝึกหัดที่ 11

1. จงหาค่า a ทั้งหมดที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นนั้นหาค่าตัวแปรได้

   1.1) $3x - ay = 7, 2ax + 6ay = -3$

   1.2) $2x + ay - 3z = 7, 2x + 2y + (a-4)z = -3, ax + 4y = 5$

2. จงหาค่า a ทั้งหมดที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นนั้นไม่สามารถหาค่าตัวแปรได้ หรือทำให้มีคำตอบของตัวแปรมากกว่า 1 ค่า

   2.1) $y + az = 1, 3x - y + 2z = 4, -x + 2y + z = 1$

2.2) $ax + y + z = 3, x + ay + z = 3, x + y + az = 3$

3. จงแก้สมการหาค่าตัวแปรจากระบบสมการต่อไปนี้

3.1) $3x + 5y = 13{,}2x + 3y = 8$

3.2) $2 + 15y = 3x, x - 5y = 0$

3.3) $x + y - z = 2{,}2x - y + z = 1{,}3x - y + z = 0$

3.4) $5x + 4y + 3z = 4{,}3x + 2y + 2z = 1{,}2x + y - 2z = 10$

3.5) $x - 3y + 6z - t = -11{,}4x - 4y - 3z - 2t = 8{,}3x + 5y - 4z + t = 9, -x - y - 5z = 10$