สรุปเนื้อหา

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ครูสัญญ์ชัย แสงภักดีจิต

==

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Function)

<u>บทนิยาม</u> ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \mathbf{y} = \mathbf{a^x} \quad \text{เมื่อ } \mathbf{a} > \mathbf{0} \text{ และ } \mathbf{a} \neq \mathbf{1}\}$$

การแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล

สมการเอกซ์โพเนนเชียล คือ สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง ดังนั้นการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลก็คือ การหาเซตคำตอบของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการนั้นเอง วิธีการแก้สมการดังกล่าวจะใช้สมบัติของเลขยกกำลังเข้ามาช่วย โดยพยายามทำฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากัน

1. ถ้าสมการดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปของ $a^x = a^y$ ได้ เมื่อเป็นเช่นนี้เราสามารถสรุปได้ว่า $x = y$

   (เราสามารถสรุปได้เช่นนี้ เพราะเป็นฟังก์ชัน 1 – 1)

2. ถ้าสมการดังกล่าว สามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการกำลังสองได้ กล่าวคืออยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$

   ดังนั้น เราสามารถใช้วิธีแยกตัวประกอบ หรือใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

==

3. ถ้าสมการดังกล่าว**ไม่**สามารถทำฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากันได้ จะต้องใช้วิธีทำให้เป็นลอการิทึมสามัญ เพื่อจะได้นำค่าลอการิทึมจากตารางมาใช้หาค่าดังกล่าว

การแก้อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

การแก้อสมการเอกซ์โพเนนเชียล จะต้องนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดมาใช้ นั่นคือ

กรณีที่ 1 ถ้า $0 < a < 1$ (ฟังก์ชันลด) แล้ว $a^{\blacksquare} < a^{\Delta}$ ก็ต่อเมื่อ $\blacksquare > \Delta$

กรณีที่ 2 ถ้า $a > 1$ (ฟังก์ชันเพิ่ม) แล้ว $a^{\blacksquare} < a^{\Delta}$ ก็ต่อเมื่อ $\blacksquare < \Delta$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า a เป็นตัวแปร ให้แยกเป็น 2 กรณีเช่นเดียวกับข้างต้น แล้วเอาเซตคำตอบทั้งหมดมายูเนียนกัน

ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Function)

บทนิยามของลอการิทึม

กำหนดให้ $a > 0$, $a \neq 1$ และ $x > 0$

ลอการิทึมของ x ฐาน a (เขียนแทนด้วย $\log_a x$) หมายถึง จำนวนจริง y ซึ่ง $a^y = x$

บทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ x\, \mathbb{R} \mid y = \log_a x \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$$

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชันลอการิทึม คือ อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

2. ลอการิทึมสามัญ (Common Logarithm) คือ ลอการิทึมที่มีฐานเท่ากับ 10 ซึ่งเราจะ**ไม่**เขียนฐานกำกับ นั่นคือ $\log_{10} x$ จะเขียนแทนด้วย $\log x$

==

3. ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithm) คือ ลอการิทึมที่มีฐานเท่ากับ e โดยที่ e เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนอตรรกยะ **มีค่าประมาณ 2.718** และเขียนลอการิทึมธรรมชาติ ด้วย $\ln x$ นั่นคือ $\log_e x$ จะเขียนแทนด้วย $\ln x$

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม

ให้ x , y เป็น**จำนวนจริงบวก** , $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ และ $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n \log_a x$ เมื่อ $n \in \mathbb{R}$
6. $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$
7. $a^{\log_a x} = x$
8. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ เมื่อ $x \neq 1$
9. $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$ เมื่อ $a \neq 1$
10. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

สมการลอการิทึม (Logarithm Equation)

สมการลอการิทึม คือ สมการที่มีลอการิทึมของตัวแปรรวมอยู่ด้วย ดังนั้นการแก้สมการลอการิทึม ก็คือการหาเซตคำตอบของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการนั้นเอง เราจะแบ่งรูปแบบของสมการอย่างกว้างๆ ออกเป็นดังนี้

รูปแบบที่ 1 $\log_a \blacksquare = k$ แปลงเป็นสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล $\blacksquare = a^k$

รูปแบบที่ 2 $\log_a \blacksquare = \log_a \Delta$ จะได้ $\blacksquare = \Delta$

รูปแบบที่ 3 รูปสมการกำลังสอง $a\blacksquare^2 + b\blacksquare + c = 0$ โดยที่ $\blacksquare$ อยู่ในรูปของลอการิทึม

แล้วหาคำตอบโดยการแยกตัวประกอบ หรือใช้สูตร $\blacksquare = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

หมายเหตุ คำตอบที่ได้ต้องตรวจสอบกับเงื่อนไขด้วย

อสมการลอการิทึม (Logarithm Inequality)

การแก้อสมการลอการิทึม จะต้องนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเมและฟังก์ชันลดมาใช้ นั่นคือ

1. ถ้า $0 < a < 1$ (ฟังก์ชันลด) $\log_a b < \log_a c$ ก็ต่อเมื่อ $b > c$
2. ถ้า $a > 1$ (ฟังก์ชันเพิ่ม) $\log_a b < \log_a c$ ก็ต่อเมื่อ $b < c$

หมายเหตุ คำตอบที่ได้ต้องตรวจสอบกับเงื่อนไขด้วย

ลอการิทึมสามัญ (Common Logarithm)

ลอการิทึมสามัญ คือ ลอการิทึมที่มีฐานเท่ากับ 10 ซึ่งเราจะไม่นิยมเขียนฐานกำกับ
นั่นคือ $\log_{10} x$ จะเขียนแทนด้วย $\log x$

1. การหาลอการิทึมสามัญของจำนวนจริงบวกใดๆ

ให้ $x \in \mathbb{R}$ เราสามารถเขียน x ให้อยู่ในรูป $x = N \times 10^n$; $1 \leq N < 10$ และ $n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $\log x = \log(N \times 10^n) = \log N + \log 10^n = \log N + n$ ....(1)

โดยที่ $\log N$ หาได้จากตารางลอการิทึมสามัญ

ค่า $\log N$ ใน (1) เรียกว่า **แมนทิสซา (mantissa)** ของ $\log x$

และจำนวนเต็ม n ใน (1) เรียกว่า **แคแรกเทอรีสติก (characteristic)** ของ $\log x$

<u>ข้อสังเกต</u>

(1) เราจะกล่าวถึง แมนทิสซา (mantissa) และ แคแรกเทอรีสติก (characteristic) ก็ต่อเมื่อ **เป็นลอการิทึมสามัญ (ฐาน 10) เท่านั้น** (นั่นคือ การหาแมนทิสซา (mantissa) และ แคแรกเทอรีสติก (characteristic) จะหาจากลอการิทึมสามัญเท่านั้น)

(2) แมนทิสซา(mantissa) ของ $\log x$ เป็นจำนวนจริงบวก(I^{+}) ที่น้อยกว่า 1 เสมอ

(3) แคแรกเทอรีสติก (characteristic) ของ $\log x$ เป็นจำนวนเต็มบวก $\left(\mathrm{I}^{+}\right)$ เมื่อ $x > 1$

แคแรกเทอรีสติก (characteristic) ของ $\log x$ เป็นจำนวนเต็มลบ $\left(\mathrm{I}^{-}\right)$ เมื่อ $x < 1$

(4) ค่าของ $\log x$ เป็นจำนวนจริงบวก $\left(\mathbb{R}^{+}\right)$ เมื่อ $x > 1$

ค่าของ $\log x$ เป็นจำนวนจริงลบ $\left(\mathbb{R}^{-}\right)$ เมื่อ $x < 1$

(5) ข้อตกลงในกรณีที่แคแรกเทอรีสติกเป็นจำนวนเต็มลบ

เช่น $\log 0.345 \;=\; 0.5378 + (-1)$ เราอาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{1}.5378$

นั่นคือ $\bar{1}.5378 \;= 0.5378 + (-1)$

(6) (แคแรกเทอรีสติก (characteristic) ของ $\log x$) +1 = จำนวนหลักหรือจำนวนเลขศูนย์**หลัง**จุดทศนิยมของ x

(7) ตารางแสดงค่าลอการิทึมสามัญ ค่าลอการิทึมสามัญที่ปรากฏในตาราง จะเป็นค่าลอการิทึมของจำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 1.00 – 9.99 ดังนั้น ถ้าต้องการหาค่าลอการิทึมของจำนวนที่มีค่ามากกว่า หรือ น้อยกว่า ค่าดังกล่าว ก็ต้องทำจำนวนดังกล่าวให้อยู่ในรูปที่มีค่าตั้งแต่ 1.00 – 9.99 จึงจะสามารถใช้ตารางดังกล่าวหาค่าลอการิทึมสามัญที่ต้องการได้

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989

ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithm)

ลอการิทึมธรรมชาติ คือ ลอการิทึมที่มีฐานเท่ากับ e โดยที่ e เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนอตรรกยะ

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ \dots \ \approx 2.718$$

และเขียนลอการิทึมฐานธรรมชาติ ด้วย $\ln x$ นั่นคือ $\log_e x = \ln x$

<u>สมบัติที่สำคัญของลอการิทึมธรรมชาติ</u>

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln x = \frac{\log x}{\log e} \approx \frac{\log x}{0.4343} \approx 2.3036 \log x$