สรุปเนื้อหา

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน

ครูสัญญ์ชัย แสงภักดีจิต

==

ผลคูณคาร์ทีเซียน

(Cartesian Product)

บทนิยาม กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด ซึ่ง a เป็นสมาชิกของ A และ b เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A x B

นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ และ $y \in B\}$

<u>หมายเหตุ</u> 1. กรณีที่ $A = B$ จะเขียนแทน $A \times A$ ด้วย A^2

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ และ $y \in \mathbb{R}\}$ หรือ เขียนแทนด้วย $\mathbb{R}^2$ ซึ่งก็คือ ระนาบนั่นเอง

ความสัมพันธ์

(Relations)

บทนิยาม กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

<u>หมายเหตุ</u> 1. จากบทนิยามข้างต้น ทำให้ทราบว่า สมาชิกของความสัมพันธ์ r ต้องอยู่ในรูปคู่อันดับ ดังนั้น ถ้า $(x,y) \in r$ เรากล่าวว่า x มีความสัมพันธ์ r กับ y และเขียนแทนด้วย x r y และ ถ้า $(x, y) \notin r$ เรากล่าวว่า x ไม่มีความสัมพันธ์ r กับ y และเขียนแทนด้วย $x \not r y$

2. กรณีที่ $r \subset A \times A$ เรากล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์บน A

3. ถ้าไม่มีการบอกว่า (x, y) เป็นสมาชิกของเซตใด ให้รู้เลยว่า $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

==

ฟังก์ชัน (Function)

1. ความหมายของฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่ง**ไม่มี**คู่อันดับสองคู่ใด ๆ ในความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกข้างหน้าเหมือนกัน **แต่**มีสมาชิกตัวหลังต่างกัน

หรืออาจจะกล่าวได้ว่า **ฟังก์ชัน** คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใดๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้าสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเท่ากันด้วย

นั่นคือ **ความสัมพันธ์ f จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ**

ถ้า $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$

และเรานิยมใช้ f, g หรือ h แทนฟังก์ชัน

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

วิธีที่ 1 พิจารณาในรูปของคู่อันดับ

ถ้าความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปคู่อันดับแบบแจกแจง ให้ดูสมาชิกของคู่อันดับ โดยที่

(1) ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r ไม่มีตัวใดเหมือนกันแล้ว r จะเป็นฟังก์ชัน

(2) ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เหมือนกันแล้ว ให้ดูสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับนั้นว่าเหมือนกันหรือไม่ โดยที่

* ถ้าสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันและตัวหลังเหมือนกันแล้ว r **จะเป็นฟังก์ชัน**

* ถ้าสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่ตัวหลังต่างกันแล้ว r จะ**ไม่เป็นฟังก์ชัน**

วิธีที่ 2 พิจารณาในรูปของเงื่อนไข

ถ้าความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปเงื่อนไข

วิธีที่ 2.1 เขียนเงื่อนไขของ r ใหม่ โดยเขียน y ในเทอมของ x แล้วให้ใช้วิธีแทนค่า x แต่ละค่า โดยที่

(1) ถ้าแต่ละค่าของ x หาค่า y ได้ค่าเดียวแล้ว r **จะเป็นฟังก์ชัน**

(2) ถ้ามีบางค่าของ x หาค่า y ได้มากกว่า 1 ค่าแล้ว r **จะไม่เป็นฟังก์ชัน**

วิธีที่ 2.2 สมมติให้ $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$

(1) ถ้าสามารถแสดงได้ว่า $y = z$ แล้ว r **จะเป็นฟังก์ชัน**

(2) ถ้ามีกรณีที่ y และ z ไม่เท่ากันแล้ว r จะ**ไม่เป็นฟังก์ชัน**

วิธีที่ 3. พิจาณาโดยใช้กราฟ

กำหนดความสัมพันธ์ r

ให้ลากเส้นตรงขนานกับแกน y และให้ตัดกราฟของ r

(1) ถ้าไม่มีเส้นตรงใดตัดกราฟของrมากกว่า1 จุด(แต่ละเส้นตัดกราฟของ r ได้ เพียงแค่จุดเดียวเท่านั้น) แล้ว r **เป็นฟังก์ชัน**

(2) ถ้ามีเส้นตรงอย่างน้อย1 ตัดกราฟมากกว่า1 จุด แล้ว r จะ**ไม่เป็นฟังก์ชัน**

โดเมน (Domain) และ เรนจ์ (Range) ของ ฟังก์ชัน

บทนิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

โดเมนของ f คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน f เขียนแทนด้วย D_f

$$D_f = \{x|(x,y) \in f\}$$

เรนจ์ของ f คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน f เขียนแทนด้วย R_f

$$R_f = \{y|(x,y) \in f\}$$

จากบทนิยามข้างต้น สรุปได้ว่า

1. สมาชิกของโดเมนของ f ต้องเป็นสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับใน f
2. เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ดังนั้น สมาชิกตัวหน้าต้องเป็นสมาชิกของ A นั่นคือ $D_f \subset A$
3. สมาชิกของเรนจ์ของ f ต้องเป็นสมาชิกตัวหลังของทุกคู่ทุกคู่อันดับใน f
4. เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ดังนั้น สมาชิกตัวหลังต้องเป็นสมาชิกของ A นั่นคือ $R_f \subset B$
5. เนื่องจาก ฟังก์ชัน เป็นความสัมพันธ์ (ที่มีเงื่อนไขตามนิยามของฟังก์ชัน)

   ดังนั้น การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จะเหมือนกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง

1. ฟังก์ชันจาก A ไป B (Function from A into B)

บทนิยาม **f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B** ก็ต่อเมื่อ

(1) f เป็นฟังก์ชัน

(2) $D_f = A$

(3) $R_f \subset B$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \to B$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $D_f \neq A$ เราเรียก f ว่า เป็นฟังก์ชันจากโดเมนของ f ไป B

2. ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (Function from A onto B)

บทนิยาม **f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B** ก็ต่อเมื่อ

(1) f เป็นฟังก์ชัน

(2) $D_f = A$

(3) $R_f = B$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{} B$

3. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B (One to One Function from A into B)

บทนิยาม **f เป็นฟังก์ชันฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B** ก็ต่อเมื่อ f เป็น ฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งถ้า $y \in R_f$ แล้วจะมี $x \in A$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $(x, y) \in f$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \xrightarrow{1-1} B$

4. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (One to One Function from A onto B)

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ

(1) f เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(2) $D_f = A$

(3) $R_f = B$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse Functions)

บทนิยาม กำหนดให้ฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$

อินเวอร์สของฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ $\mathbf{f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}}$

จากบทนิยาม อินเวอร์สของฟังก์ชัน **อาจจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน**ก็ได้

เช่น $f = \{(1,2), (2,0), (3,2), (4,5)\}$ จะพบว่า f เป็นฟังก์ชัน

แต่ $f^{-1} = \{(2,1), (0,2), (2,3), (5,4)\}$ เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชัน f แต่<u>**ไม่**</u>เป็นฟังก์ชัน

เพราะ $f^{-1}(2) = 1, 3$

ทฤษฎีบท กำหนดฟังก์ชัน f

f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

และเรียก f^{-1} ว่า **ฟังก์ชันอินเวอร์ส**

f^{-1}
- เป็น**อินเวอร์สฟังก์ชัน** เมื่อ f <u>**ไม่**</u>เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
- เป็น **ฟังก์ชันอินเวอร์ส** เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

<u>**สิ่งที่ต้องรู้**</u>

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
2. ถ้า f <u>**ไม่**</u>เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 แล้ว f <u>**ไม่**</u>มีฟังก์ชันอินเวอร์ส แต่จะมีอินเวอร์สของฟังก์ชัน

==

3. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

4. ถ้า $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ แล้ว $f^{-1} : B \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A$

5. $\mathbf{D_{f^{-1}} = R_f}$ และ $\mathbf{R_{f^{-1}} = D_f}$ ******

6. กราฟของ f และ f^{-1} จะสมมาตรเทียบกับเส้นตรง y = x

7. ถ้า $\mathbf{f}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $\mathbf{y = f(x)}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{x = f^{-1}(y)}$ *******

<u>การหาฟังก์ชันอินเวอร์ส</u>

ในกรณีที่กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และต้องการหา f^{-1} มีวิธีการหา 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 โดยการสลับตัวแปร มีวิธีการดังนี้

1. เขียน $y = f(x)$ (ตามที่กำหนดให้)
2. สลับตัวแปรระหว่าง x และ y ในสมการ $y = f(x)$
3. จัด y ในรูป x จากสมการใหม่ ในข้อ 2
4. y ที่ได้ในข้อ 3 คือ $f^{-1}(x)$ นั่นคือ $y = f^{-1}(x)$
5. **เมื่อหา $\mathbf{f^{-1}}$ ให้ระบุว่า $\mathbf{x \in R_f}$ ต่อท้ายด้วย**

วิธีที่ 2 โดยใช้สมบัติ $y = f(x)$ **ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{x = f^{-1}(y)}$**

มีลำดับขั้นตอน ดังนี้ (ดูตัวอย่างประกอบ)

ลำดับขั้นตอน	ตัวอย่าง
1. เขียน $y = f(x)$	1. $x + 1 = f(x)$
2. จะได้ $f^{-1}(y) = x$	2. $f^{-1}(x+1) = x$
3. ให้ $y = k$ แล้วแก้สมการหาค่า x	3. ให้ $x + 1 = k$ จะได้ $x = k - 1$
4. แทนค่า y และ x ที่ได้จากข้อ *3* ลงในสมการข้อ 2 จะได้ $f^{-1}(k)$	4. $f^{-1}(k) = k - 1$
5. แทนค่า k ด้วย x จะได้ $f^{-1}(x)$	5. $f^{-1}(x) = x - 1$
6. **เมื่อหา $\mathbf{f^{-1}}$ ให้ระบุว่า $\mathbf{x \in R_f}$ ต่อท้ายด้วย**	**6. $\mathbf{f^{-1}(x) = x - 1}$ เมื่อ $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$** ($\because R_f = \mathbb{R}$)

พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of functions) หรือ การดำเนินการของฟังก์ชัน

<u>บทนิยาม</u> กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง

$$f+g = \{(x,y) \mid y = f(x)+g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$
$$f-g = \{(x,y) \mid y = f(x)-g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$
$$f \cdot g = \{(x,y) \mid y = f(x)\cdot g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$
$$\frac{f}{g} = \left\{(x,y) \mid y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ และ } x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\right\}$$

<u>สิ่งที่ต้องรู้จากบทนิยาม</u>

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$
$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ , } g(x) \neq 0$$

$$D_{f+g} \text{ , } D_{f-g}, D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$$
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) \neq 0\}$$

ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $\mathbf{R_f \cap D_g} \neq \emptyset$

ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย gof โดยที่

(gof)(x) = g(f(x)) สำหรับทุก $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ **และ** $\mathbf{f(x)} \in \mathbf{D_g}$

==

สิ่งที่ต้องรู้จากบทนิยาม

1. gof จะสร้างได้ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{R_f \cap D_g} \neq \emptyset$
2. gof ต้องเริ่มด้วย f ก่อนแล้วตามด้วย g
   แต่ fog ต้องเริ่มด้วย g ก่อนแล้วตามด้วย f นั่นคือ gof ≠ fog
3. $D_{gof} \subset D_f$ และ $R_{gof} \subset R_g$
4. $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in R_f \cap D_g\}$
5. ถ้า $R_f \subset D_g$ แล้ว $D_{gof} = D_f$

สมบัติของฟังก์ชันคอมโพสิท

1. ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ จะได้ว่า $gof : A \rightarrow C$
2. ถ้า $f : A \xrightarrow{1-1} B$ และ $g : B \xrightarrow{1-1} C$ จะได้ว่า $gof : A \xrightarrow{1-1} C$
3. ถ้า $f : A \xrightarrow[onto]{} B$ และ $g : B \xrightarrow[onto]{} C$ จะได้ว่า $gof : A \xrightarrow[onto]{} C$
4. การคอมโพสิทฟังก์ชันมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ นั่นคือ
   ถ้ามี fo(goh) และ (fog)oh แล้ว **fo(goh) = (fog)oh**

การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in R_f \cap D_g\}$ หรือ $D_{gof} = \{x \mid x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$R_{gof} = \{y \in R_g \mid y = g(f(x)) \wedge f(x) \in R_f \cap D_g\}$

ข้อควรระวัง!!! ห้ามไปหา $\mathbf{D_{gof}}$ และ $\mathbf{R_{gof}}$ จาก gof ที่เราหาได้โดยตรง ********