สรุปเนื้อหา

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง หลักการนับเบื้องต้น

ครูสัญต์ชัย แสงภักดีจิต

==========

กฎการนับเบื้องต้น
(Fundamental Principle of Counting)

1. หลักการบวก (Addition Principle)

ถ้าการทำงานหนึ่งประกอบด้วยวิธีทำงาน k กรณี กล่าวคือ

กรณีที่ 1 มีวิธีการทำงาน n_1 วิธี

กรณีที่ 2 มีวิธีการทำงาน n_2 วิธี

. .

. .

. .

กรณีที่ k มีวิธีการทำงาน n_k วิธี

โดยวิธีการทำงานแต่ละวิธีจะ**ทำพร้อมๆกันไม่ได้**

Kru Sanchai

จะได้ จำนวนวิธีการทำงานทั้ง k กรณี เท่ากับ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ วิธี

2. หลักการคูณ (Multiplication Principle)

ถ้าต้องการทำงาน k ขั้นตอน**ต่อเนื่องกัน** (หรือเกิดพร้อมกัน) โดยที่

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีของการทำงาน n_1 วิธี ในแต่ละวิธีของการทำงานขั้นตอนที่ 1

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีของการทำงาน n_2 วิธี ในแต่ละวิธีของการทำงานขั้นตอนที่ 1, 2

ขั้นตอนที่ 3 มีวิธีของการทำงาน n_2 วิธี ในแต่ละวิธีของการทำงานขั้นตอนที่ 1, 2 , 3

. .

. .

. .

ขั้นตอนที่ k – 1 มีวิธีของการทำงาน n_{k-1} วิธี ในแต่ละวิธีของการทำงานขั้นตอนที่ 1 ถึง k – 1

ขั้นตอนที่ k มีวิธีของการทำงาน n_k วิธี

จะได้ จำนวนวิธีการทำงานทั้ง k ขั้นตอนนี้ เท่ากับ $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k}$ วิธี

หมายเหตุ กรณีงาน k ขั้นตอน**ไม่เกิดขึ้นพร้อมกันและไม่ต่อเนื่องกัน**

จำนวนวิธีทั้งหมดหาได้โดย**หลักการบวก**

==========

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

วิธีเรียงสับเปลี่ยน หมายถึง วิธีการเรียงอันดับสิ่งของโดถือเอาอันดับ หรือตำแหน่งสิ่งของเป็นสำคัญ เช่น อักษร A, B, C สามารถเรียงเป็น ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA โดยทั้งหมดนี้ถือว่าแตกต่างกัน

ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เราจะศึกษาวิธีเรียงสับเปลี่ยน 2 ลักษณะ คือ

(1) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น

(2) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

โดยในแต่ละลักษณะ เราจะศึกษาทั้งที่สิ่งของที่ต้องการเรียงสับเปลี่ยนแตกต่างกันทั้งหมด และ **ไม่**แตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น (Linear Permutation)

เป็นวิธีการจัดสิ่งของในแนวเส้นตรง หรือเส้นโค้ง โดยที่ปลายทั้งสองข้างของเส้น**ไม่**บรรจบกัน แบ่งเป็น

1.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

Kru Sanchai

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดคราวละ n สิ่ง หรือคราวละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ (โดยที่แต่ละตำแหน่งใช้ของ**ไม่**ซ้ำกัน) ซึ่งการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นดังนี้

สูตร 1 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน = $n!$ วิธี

สูตร 2 ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการนำมาจัดเรียงแบบเชิงเส้น จำนวน r สิ่ง ($r \leq n$)

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ $^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

หมายเหตุ (1) $^{n}P_{r}$ สามารถเขียนได้หลายแบบ ดังนี้ $P_{n,r}$ หรือ $_{n}P_{r}$

(2) เราอาจจะหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้จาก**กฎการนับ**ได้อีกวิธีหนึ่ง

(3) เทคนิคการจัดเรียงให้สิ่งของบางสิ่งอยู่**ให้ติดกันเสมอ** ให้มองรวมสิ่งที่ต้องการให้อยู่ติดกันเป็นสิ่งของหนึ่งสิ่ง เมื่อเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดแล้ว ให้คูณวิธีเรียงสับเปลี่ยนในกลุ่มด้วย **(มัดมองเป็นหนึ่ง)**

==========

(4) เทคนิคการจัดเรียงที่ให้สิ่งของบางสิ่ง**ไม่ให้อยู่ติดกันเลย** ให้จัดเรียงสิ่งของอย่างอื่นก่อนแล้วนำสิ่งของที่เหลือที่ไม่ต้องการให้ติดกัน ไปแทรกระหว่างสิ่งที่จัดไว้แล้ว **(จัดอย่างอื่นแล้วแทรก)**

1.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

(1) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน**ไม่**ทั้งหมดคราวละ n สิ่ง (โดยที่ตำแหน่งใช้ของ**ไม่**ซ้ำกัน) มีดังนี้

สูตร 3 ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน**ไม่**ทั้งหมด โดยที่

ในกลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง

ในกลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง

.

.

.

ในกลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง และ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

จะได้ **จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง n สิ่ง** $= \dfrac{\mathbf{n!}}{\mathbf{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}}$

Kru Sanchai

แนวคิดหลัก ของสูตร 3 คือ จัดเรียงในลักษณะที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดก่อน แล้วหารด้วยจำนวนสิ่งของที่ซ้ำกัน เพราะการสับเปลี่ยนภายในกลุ่มสิ่งของที่เหมือนกัน**ไม่มี**ความสำคัญ(หรือ**ไม่**ต่างกัน)

(2) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน**ไม่**ทั้งหมดคราวละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ (โดยที่ตำแหน่งใช้ของ**ไม่**ซ้ำกัน) ดังนี้

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน**ไม่**ทั้งหมด โดยที่

ในกลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง

ในกลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง

.

.

.

ในกลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง และ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน**ไม่**ทั้งหมดคราวละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ (โดยที่ตำแหน่งใช้ของ**ไม่**ซ้ำกัน) จะ**ไม่มีสูตรสำเร็จ**ในการหาโดยตรง เราจะต้องแยกคิดเป็นกรณี

==========

2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม (Circular Permutation)

เป็นการจัดเรียงรอบสิ่งใดสิ่งหนึ่ง **ไม่มีตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถว** ซึ่งแตกต่างจากการจัดเรียงแบบเชิงเส้น เช่น การจัดคนนั่งรอบโต๊ะกลม การร้อยพวงมาลัยเป็นวงกลม เป็นต้น

2.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของ n สิ่งที่**แตกต่างกันทั้งหมด**คราวละ n สิ่ง หรือคราวละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ (โดยที่แต่ละตำแหน่งใช้ของ**ไม่ซ้ำ**กัน) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เป็นดังนี้

สูตร 4 (1) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็นแบบวงกลมแบบพลิกไม่ได้

$= (n-1)! = \frac{P_{n,n}}{n}$ วิธี

(2) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็นแบบวงกลมแบบพลิกไม่ได้ เมื่อ $r \leq n$

$= \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r} = \frac{P_{n,r}}{r}$ วิธี

Kru Sanchai

หมายเหตุ : (1) สูตร 4 ข้างต้น ที่ต้องหารด้วย n หรือ r เพราะเกิดจากการเรียงแบบเชิงเส้นที่มีตัวแรก(หัวแถว) ได้ทั้งหมด n วิธี หรือ r วิธี แต่เมื่อนำมาจัดเรียงแบบวงกลมจะได้เป็นวิธีเดียวกัน

(2) แนวคิดในการจัดเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมอีกแนวทางหนึ่ง คือ **ให้ยึดสิ่งของสิ่งหนึ่งคงที่ แล้วจัดที่เหลือแบบเชิงเส้น**

สูตร 5 การจัดเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมแบบพลิกได้ (มองได้ 2 ด้าน)

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมที่ดูได้ทั้งสองด้าน คือ พลิกดูแล้วถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน เช่น การร้อยลูกปัดเป็นกำไล หรือพวงกุญแจ

(1) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็นแบบวงกลมแบบพลิกได้

$= \frac{(n-1)!}{2}$

= จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมแบบพลิกไม่ได้ หารด้วย 2

==========

(2) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็นแบบวงกลมแบบพลิกได้ โดยจัดทีละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{2} = \frac{P_{n,r}}{2r} \text{ วิธี}$$

2.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

สูตร 6 ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน**ไม่**ทั้งหมด โดยที่

ในกลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง

ในกลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง

.

.

.

ในกลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง และ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

จะได้ **จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของทั้ง n สิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด**

$$= \frac{(n-1)!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}$$ **เมื่อ ห.ร.ม ของ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k = 1$**

Kru Sanchai

ข้อควรระวัง

1. ถ้า ห.ร.ม ของ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k \neq 1$ แล้วจะใช้สูตร 6 **ไม่ได้** ต้องใช้ความรู้ในระดับสูงกว่านี้
2. ถ้า ห.ร.ม ของ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k \neq 1$ **แต่** จำนวนสิ่งของทั้งหมดที่จะนำมาจัดเรียงเป็นวงกลม มี**ไม่มากนัก** เราสามารถจะแจกแจงออกมาแล้วนับตรงๆได้เลย

วิธีจัดหมู่
(Combination)

วิธีจัดหมู่ หมายถึง การนำสิ่งของที่มีความแตกต่างกันทั้งหมดหรือเพียงบางส่วนมาจัดหมู่ **โดยไม่สนใจตำแหน่งหรือลำดับก่อน – หลัง**

1. วิธีจัดหมู่ของสิ่งของครั้งละ r สิ่ง จากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง ($r \leq n$)

สูตร 7 : ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด หยิบหรือเลือกมารวมเป็นหมู่ หมู่ละ r สิ่ง จำนวนวิธีที่ได้ทั้งหมดเท่ากับ $${}^{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{P_{n,r}}{r!}$$

สมบัติบางประการที่ควรรู้

(1) ${}^{n}C_{0} = {}^{n}C_{n} = 1$

(2) ${}^{n}C_{1} = {}^{n}C_{n-1} = n$

(3) ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$

(4) ${}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r} = {}^{n+1}C_{r}$

(5) ${}^{n}C_{0} + {}^{n}C_{1} + {}^{n}C_{2} + \ldots + {}^{n}C_{n} = 2^{n}$

Kru Sanchai

==========