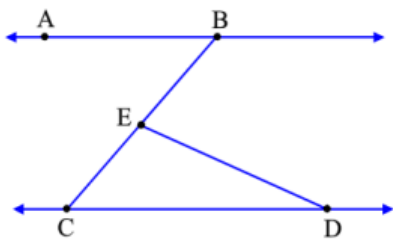


ใบงานที่ 2 เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต
หน่วยที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต
รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

1.



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

และ $\overline{DE}$ ตัด $\overline{BC}$ ที่จุด E

จงพิสูจน์ว่า $\angle BED = \angle ABE + \angle EDC$

กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า

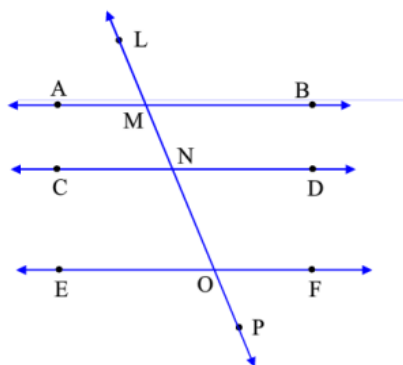
พิสูจน์

เนื่องจาก $\angle ABE = \angle DCB$

และ $\angle BED = \angle DCB + \angle EDC$

ดังนั้น $\angle BED = \angle ABE + \angle EDC$

2.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

$\overleftrightarrow{LP}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{EF}$ ที่จุด M, N และ O ตามลำดับ

1) $\hat{EON} = \hat{BMN}$

2) $\hat{AMN} + \hat{EON} = 180^\circ$

3) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

กำหนดให้

.....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

.....

.....

.....

พิสูจน์

1) เนื่องจาก $\hat{BMN} = \hat{CNM}$

.....

.....

และ $\hat{CNM} = \hat{EON}$

.....

.....

.....

ดังนั้น $\hat{EON} = \hat{BMN}$

.....

2) เนื่องจาก $\hat{AMN} + \hat{BMN} = 180^\circ$

.....

จะได้ $\hat{AMN} + \hat{EON} = 180^\circ$

.....

.....

3) ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

.....

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรม 2 เรื่อง การสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต

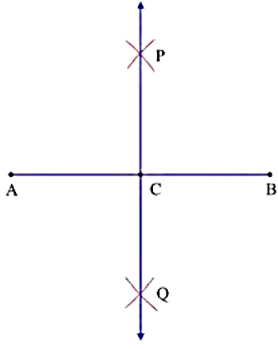
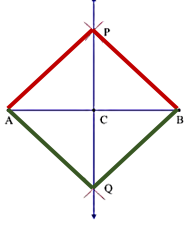
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การสร้างและการให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้าง (1
รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

จุดประสงค์ สร้างและบอกขั้นตอนการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิตที่กำหนดให้โดยใช้วงเวียนและสันตรงได้

1. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

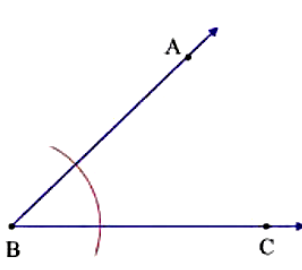
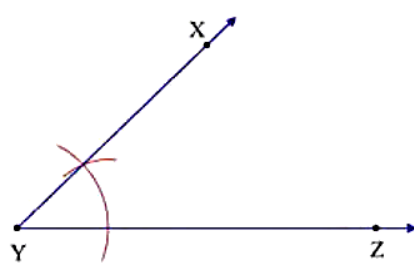
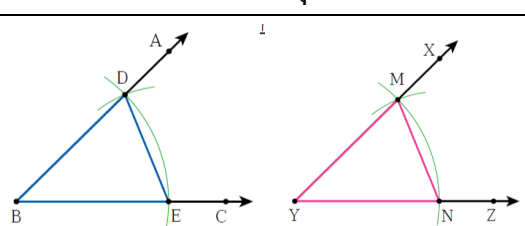
การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง  สร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ $\overline{AB}$ ได้ดังรูป 	จากรูปที่สร้าง จะได้ $\overline{XY} = \overline{AB}$ เพราะว่า

2. การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง  สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ที่จุด C ได้ดังรูป 	

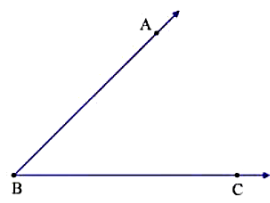
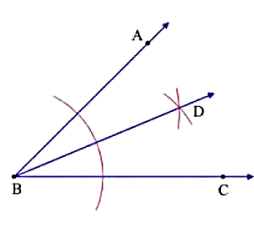
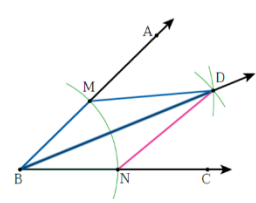
จากรูปที่สร้าง จะได้ $\overleftrightarrow{PQ}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ที่จุด C ทำให้ได้ $AC = BC$

3. การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $\hat{ABC}$ เป็นมุมมุมหนึ่ง  สร้าง $\hat{XYZ}$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\hat{ABC}$ ได้ดังรูป 	

จากรูปที่สร้าง จะได้ $\hat{XYZ} = \hat{ABC}$

4. การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
กำหนดให้ $\hat{ABC}$ เป็นมุมมุมหนึ่ง  สร้าง $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $\hat{ABC}$ ได้ดังรูป 	

จากรูปที่สร้าง จะได้ $\overrightarrow{BD}$ แบ่งครึ่ง $\hat{ABC}$ ทำให้ได้ $\hat{ABD} = \hat{CBD}$

เรื่อง สร้างเส้นขนานได้

1. กำหนดจุด P อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$ จงสร้างเส้นตรงผ่านจุด P และขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$

กำหนดให้ จุด P อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$

ต้องการสร้าง $\overleftrightarrow{CP}$ ผ่านจุด P และขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$

สร้าง

1. ลาก $\overline{EP}$ เชื่อมจุด P และจุด E ซึ่งเป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overleftrightarrow{AB}$

2. สร้าง $\widehat{EPC}$ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\widehat{BEP}$ โดย $\widehat{EPC}$ และ $\widehat{BEP}$ เป็นมุมแย้ง
จะได้ $\overleftrightarrow{CP}$ ผ่านจุด P และขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$

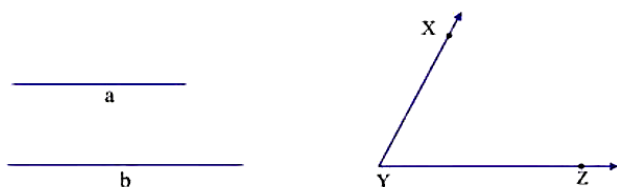
พิสูจน์ เนื่องจาก $\widehat{EPC} = \widehat{BEP}$
ดังนั้น $\overleftrightarrow{CP}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$
.....
.....

นั่นคือ $\overleftrightarrow{CP}$ ผ่านจุด P และขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$

ชื่อ ชั้น เลขที่

ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง การสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต

1. กำหนด $\hat{X}YZ$ และส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาว a หน่วย และ b หน่วย จงสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มุมมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับครึ่งหนึ่งของขนาดของ $\hat{X}YZ$ ด้านที่ประชิดมุมที่สร้างยาวเท่ากับ a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ



แนวการสร้าง

.....

.....

.....

.....

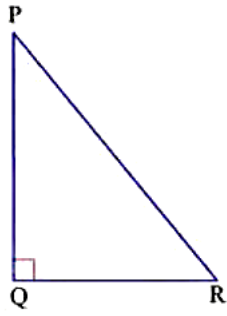
.....

.....

.....

.....

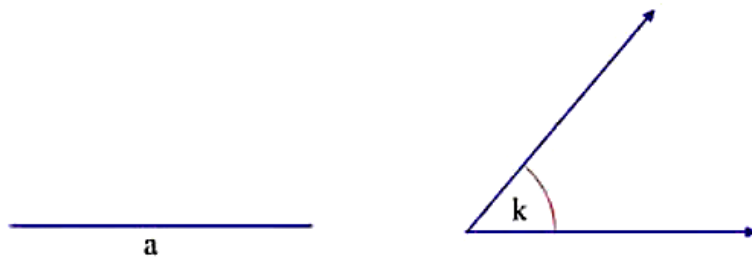
2. กำหนด $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี
ด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากับ PR
และฐานยาวเป็นสองเท่าของ QR

แนวการสร้าง

3. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีความยาวของฐานเท่ากับ a หน่วยและมุมหนึ่งมี ขนาดเท่ากับ k

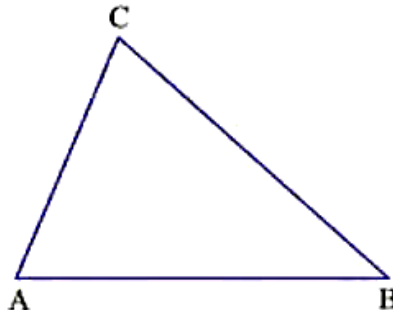


สร้าง

แนวการสร้าง

ใบงานที่ 4 เรื่อง การสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต

1. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป



1 สร้าง $\overleftrightarrow{XY}$ ให้ผ่านจุด C และขนานกับ $\overline{AB}$

2 กำหนดจุด D, E และ F เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{XY}$

3 ลาก $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ และ $\overline{BF}$ ตามลำดับ

4 $\triangle ADB$, $\triangle AEB$ และ $\triangle AFB$ แต่ละรูปมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ABC$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

.....

5 นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาวเท่ากับ AB และมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ABC$ มีกี่รูป และรูปสามเหลี่ยมเหล่านั้นมีจุดยอดอยู่ที่ใด

.....

.....

.....

ชื่อ ชั้น เลขที่

ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง สร้างได้ไม่ยาก

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง การสร้างและการให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้าง (3
รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

จุดประสงค์ สร้างและบอกขั้นตอนการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิตที่กำหนดให้โดยใช้วงเวียนและสันตรงได้
คำสั่ง จงสร้างรูปที่กำหนดให้ พร้อมทั้งให้เหตุผล

1. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้มุมมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ 60° และ ด้านประกอบมุมนี้ยาวเท่ากับ a หน่วย และ b หน่วย



กำหนดให้

ต้องการสร้าง

แนวการสร้าง

ขั้นตอนการสร้าง

1. สร้างมุม $\widehat{XAY}$ ให้มีขนาด 60°
2. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ a หน่วย เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AY}$ ที่จุด B
3. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ b หน่วย เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AX}$ ที่จุด D
4. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ b หน่วย เขียนส่วนโค้ง
5. ใช้จุด D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ a หน่วย เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งในข้อ 4 ที่จุด C
6. ลาก $\overline{BC}$ และ $\overline{DC}$

จะได้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มุมมุมหนึ่งมีขนาด 60° และมีด้านประกอบมุม 60°
ยาว a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ

พิสูจน์ เนื่องจาก $AB = DC = a$ หน่วย

เนื่องจาก $AD = BC = b$ หน่วย

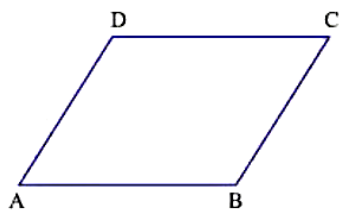
ดังนั้น $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เนื่องจาก $\hat{DAB} = \hat{XAY} = 60^\circ$

ดังนั้น $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\hat{DAB} = 60^\circ$

$AB = a$ หน่วย และ $AD = b$ หน่วย

2. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่กำหนดให้ รูปสามเหลี่ยมที่สร้างมีได้กี่รูป



กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ต้องการสร้าง รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\square ABCD$

แนวการสร้าง

ขั้นตอนการสร้าง

- ต่อ $\overline{AB}$ ไปทางจุด B ให้มีความยาวพอสมควร
 - ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ AB เขียนส่วนโค้งตัดส่วนของ $\overline{AB}$ ที่จุด E
 - กำหนดจุด F เป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overline{CD}$ ลาก $\overline{AF}$ และ $\overline{EF}$
- จะได้ $\triangle AEF$ มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\square ABCD$

พิสูจน์ ลาก $\overline{FH}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด H

เนื่องจาก $AB = BE$

จะได้ $AE = 2AB$

เนื่องจาก $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

จะได้ $\overline{FH}$ เป็นส่วนสูงของ $\triangle AEF$ และ $\square ABCD$

เนื่องจากพื้นที่ของ $\square ABCD =$

และพื้นที่ของ $\triangle AEF =$

ดังนั้นพื้นที่ของ $\triangle AEF =$

$=$

นั่นคือ พื้นที่ของ $\triangle AEF$ เท่ากับพื้นที่ของ $\square ABCD$

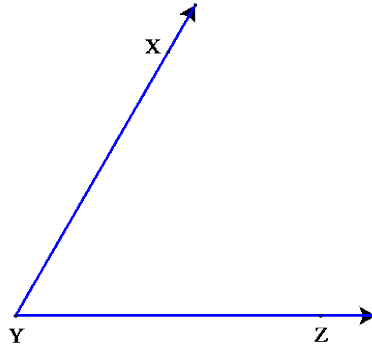
เนื่องจากจุด F เป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overline{CD}$

ดังนั้น จึงสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\square ABCD$

ได้หลายรูป เช่น $\triangle AGE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งที่มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\square ABCD$

ใบงานที่ 5

ในการสร้างพื้นฐานนักเรียนเคยสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้มาแล้ว ต่อไปนี้
เป็นการสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมอีกวิธีหนึ่ง



กำหนด $\hat{X}YZ$

ขั้นตอนการสร้าง เส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{X}YZ$

1. ใช้จุด Y เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overline{YX}$ และ $\overline{YZ}$ ที่จุด P และจุด Q ตามลำดับ
2. ใช้จุด Y เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีพอสมควรที่แตกต่างจากรัศมีที่ใช้ในข้อ 1 เขียนส่วนโค้งตัด $\overline{YX}$ และ $\overline{YZ}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ
3. ลาก $\overline{EQ}$ และ $\overline{FP}$ ให้ตัดกันที่จุด O
4. ลาก $\overline{YO}$

จะได้ $\overline{YO}$ แบ่งครึ่งมุม $\hat{X}YZ$

จงพิสูจน์ว่า $\overline{YO}$ แบ่งครึ่งมุม $\hat{X}YZ$

$$\triangle PYF \cong \triangle QYE \quad \dots\dots\dots$$

$$\hat{YFP} = \hat{YEQ} \quad \dots\dots\dots$$

$$\hat{QOF} = \hat{POE} \quad \dots\dots\dots$$

$$QF = PE \quad \dots\dots\dots$$

$$\text{จะได้ } \triangle QOF \cong \triangle POE \quad \dots\dots\dots$$

$$OQ = OP \quad \dots\dots\dots$$

$$\text{จะได้ } \triangle YQO \cong \triangle YPO \quad \dots\dots\dots$$

$$\hat{PYO} = \hat{QYO} \quad \dots\dots\dots$$

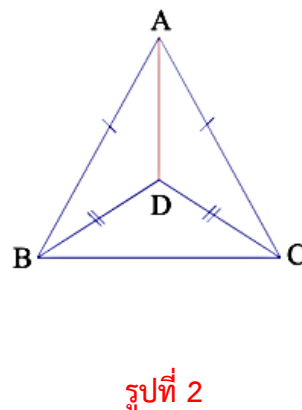
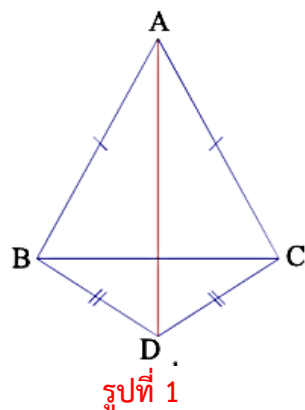
นั่นคือ $\overline{YO}$ แบ่งครึ่งมุม $\hat{X}YZ$

เรื่อง การนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้
 หน่วยที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (2)
 รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการให้เหตุผลได้

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่ใช้ฐาน $\overline{BC}$ ร่วมกัน โดยมี $AB = AC$ และ $DB = DC$ ลาก $\overline{AD}$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ เท่ากันทุกประการ

วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนด



วิเคราะห์โจทย์

กำหนดให้

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

.....

.....

.....

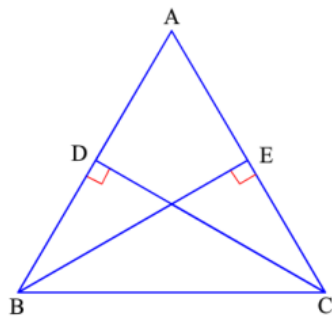
ชื่อ ชั้น เลขที่

ใบงานที่ 8 เรื่อง การนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้
หน่วยที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (2
รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
ไปใช้ในการให้เหตุผลได้

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยที่ $AB = AC$ ลาก $\overline{CD}$ และ $\overline{BE}$ ตั้งฉาก
กับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D และจุด E ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $CD = BE$ และ $AD = AE$

วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนด



วิเคราะห์โจทย์

กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

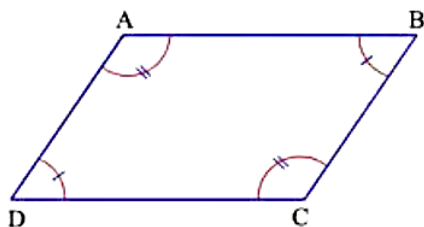
.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 10 เรื่อง พิสูจน์ทฤษฎีบทสี่เหลี่ยมด้านขนาน (1)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (1)
รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

จุดประสงค์ ใช้สมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในการให้เหตุผลได้
คำสั่ง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอภิปราย เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต่อไปนี้
 แล้วส่งตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอผลงานของกลุ่ม

ทฤษฎีบท 4 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากันสองคู่
 แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์ เนื่องจาก $\angle DCB = \angle BAD$ และ $\angle CDA = \angle ABC$

$$\angle BAD + \angle DCB + \angle ABC + \angle CDA = 360^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } 2(\angle BAD) + 2(\angle ABC) = 360^\circ$$

$$\text{จะได้ } \begin{matrix} \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ \\ \overline{AD} \parallel \overline{BC} \end{matrix}$$

$$\text{เนื่องจาก } 2(\angle BAD) + 2(\angle CDA) = 360^\circ$$

$$\angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$$

จะได้

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

ดังนั้น $\square$ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ใบงานที่ 10 เรื่อง พิสูจน์ทฤษฎีบทสี่เหลี่ยมด้านขนาน (1)

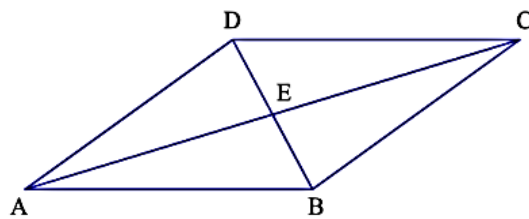
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (1)

รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

จุดประสงค์ ใช้สมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในการให้เหตุผลได้

คำสั่ง ให้นักเรียนแต่ละคนพิสูจน์ทฤษฎีบทรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5 เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม



กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์

พิสูจน์

เนื่องจาก

$$\triangle DAE \cong \triangle BCE$$

ดังนั้น

$$DE = BE \text{ และ } AE = CE$$

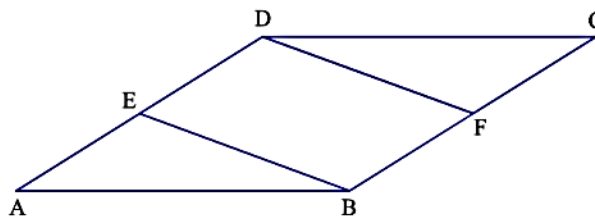
ใบงานที่ 11 เรื่อง พิสูจน์ทฤษฎีบทสี่เหลี่ยมด้านขนาน (2)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (2)
รายวิชา คณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

จุดประสงค์ ใช้สมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในการให้เหตุผลได้

คำสั่ง ให้นักเรียนแต่ละคนพิสูจน์ทฤษฎีบทรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต่อไปนี้

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และด้าน BC ตามลำดับ ลาก $\overline{EB}$ และ $\overline{DF}$ จงพิสูจน์ว่า $\square DFBE$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

เนื่องจาก $\overline{ED} \parallel \overline{BF}$

และ $ED = BF$

ดังนั้น $\square DFBE$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน